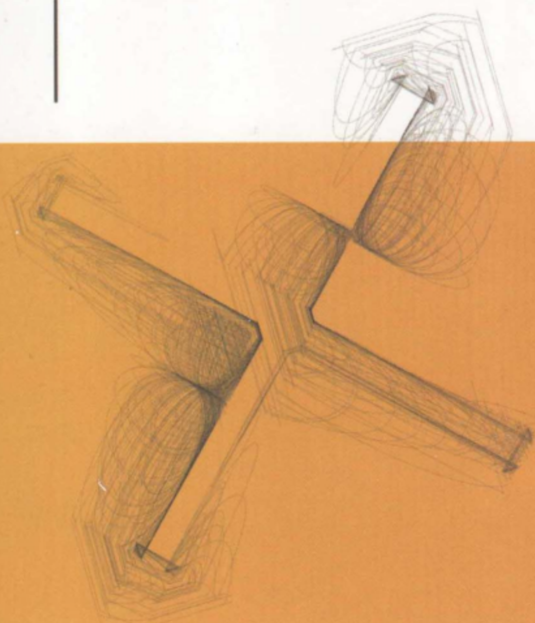
Operator Algebras on Pontrjagin Space

Pontrjagin空间上的算子代数

杨海涛 著


厦门大学出版社 XIAMEN UNIVERSITY PRESS
国家一级出版社
全国百佳图书出版单位



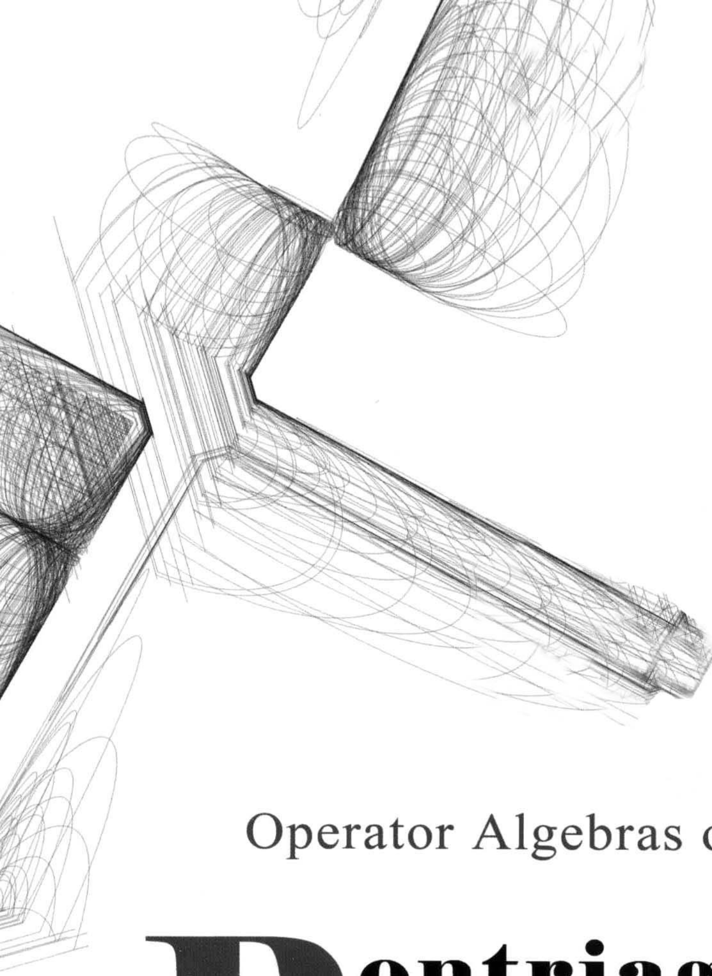
责任编辑　眭　蔚
特约编辑　郑　丹
封面设计　李嘉彬

O0214-1-1

ISBN 978-7-5615-4870-7



定价:52.00元



杨海涛 著



Operator Algebras on Pontrjagin Space

Pontrjagin空间上的算子代数



厦门大学出版社
XIAMEN UNIVERSITY PRESS
国家一级出版社
全国百佳图书出版单位

图书在版编目(CIP)数据

Pontrjagin 空间上的算子代数/杨海涛著. 一厦门:厦门大学出版社，2013.12
ISBN 978-7-5615-4870-7

Ⅰ. ①P…　Ⅱ. ①杨…　Ⅲ. ①算子代数－研究　Ⅳ. ①O177.5

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 291006 号

厦门大学出版社出版发行
(地址:厦门市软件园二期望海路 39 号　邮编:361008)
http://www.xmupress.com
xmup @ xmupress.com
泉州新春印刷有限公司印刷
2013 年 12 月第 1 版　2013 年 12 月第 1 次印刷
开本:787×1092　1/16　印张:15.25
插页:2　字数:320 千字
定价:52.00 元

· 内容简介

本书是作者多年来在 Pontrjagin 空间上算子理论与算子代数方面研究工作的总结。内容包括：Pontrjagin 空间及其上算子理论基础、算子代数的基本概念、算子代数的对称理想与非对称理想、算子代数的分类与形式、算子代数的其他形式及弱闭、一致闭等价条件、算子代数的 C*- 等价性、算子代数的导子与不变子空间、算子代数的抽象定义、Pontrjagin 空间上的算子代数理论的应用、条件正定与扩张、Pontrjagin 空间上的算子代数中进一步研究的公开问题。最后是对 Pontrjagin 空间上的算子代数理论方面研究的主要文献进行评注。

本书可供大学数学、物理、力学专业高年级学生、研究生，数学研究工作者阅读和参考。阅读本书需要具备泛函分析、抽象代数、拓扑线性空间的基础知识，同时还要了解 Pontrjagin 空间的结构、不定度规空间上的算子理论以及 Hilbert 空间上经典算子代数的基本理论。

前 言

算子代数是泛函分析中重要的研究领域之一..自 20 世纪 30 年代 J. von Neumann 和 F. Murray 创立算子代数理论以来,已得到迅速发展. 它的研究不仅具有十分重要的理论价值,而且具有广泛的应用前景. 目前这一理论已成为现代数学的热门分支之一. 它与量子力学、宇宙学、非交换几何、线性系统、控制论甚至数论都有密切联系.

经典的算子代数即 Hilbert 空间上的算子代数,它有两类:弱闭的,即 Von Neumann 代数;一致闭的,即 C^*-代数. 它们都是自伴的算子代数. 1960 年,R. V. Kadison 和 I. M. Singer 提出三角算子代数,J. R. Ringrose 提出套代数,K. R. Davidsoon 总结前人工作著有《套代数》;1982 年,F. G. ilfeather 和 D. R. larson 引入一般的算子代数 ——VonNeumann 代数中的套子代数;1964 年,M. A. Naimark 提出了 Pontrjagin 空间上的算子代数.

由于 Pontrjagin 空间是不定度规空间,它是 Hilbert 空间的推广,因此 Pontrjagin 空间上的算子代数可以把 Hilbert 空间上的算子代数(Von Neumann 代数和 C^*-代数)作为其子代数. 同时,该代数又是非对称(非自伴)的. 在 Pontrjagin 空间的正规分解下,该代数又是一个三角算子代数,并且含有套子代数. 这就是说,Pontrjagin 空间上的算子代数是更广泛的算子代数.

事实上,在大量的研究中发现,Pontrjagin 空间上的算子与算子代数中问题的结论与 Hilbert 空间上的情况完全不同. 例如:Pontrjagin 空间上的算子代数的理想一般不对称(Von Neumann 代数和 C^*-代数的理想都是对称的);其上的导子未必是内的(Von Neumann 代数上的导子必是内的);Pontrjagin 空间上算子的 P-F 定理一般不成立(Hilbert 空间上算子的 P-F 定理必成立);该代数的谱空间未必极不连通(交换 Von Neumann 代数的谱空间都是极不连通的). 这也说明 Pontrjagin 空间上的算子代数的研究中包含了全新的内容、方法、工具和新结论,因而更具有普遍意义. 这就如同从整数环扩展到有理数域的过程中研究除法更有意义,从有理数域扩展到实数域过程中研究无理数更有意义一样. 追求一般化和普遍性是数学基础理论研究的重要目标之一,从这个意义上讲,研究 Pontrjagin 空间上的算子代数更具有一般性和普遍意义.

Pontrjagin 空间是负指标为 k 的不定度规空间. 不定度规空间是一种具有明确物理背景

的空间，该种空间最初是出现在 P. A. M. Dirac 的有关量子场论方面的文章中. 后来在 20 世纪 40 年代，前苏联数学家 Pontrjagin 从力学问题研究的需要中首先从数学上讨论不定度规空间及其上的算子理论. 爱因斯坦的相对论中“时 — 空”的空间其实就是负指标为 1 的四维不定度规空间，即四维的$\prod_1$ 空间.

有关不定度规空间上的几何理论及算子理论虽然远不像 Hilbert 空间中的相应理论那样丰富完善，但也取得很多比较成熟的理论. 这些内容可在 J. Bognar 所著《Indefinite inner product spaces》(Berlin：Springer-Verlag，1974) 和夏道行、严绍宗先生所著《线性算子谱理论 Ⅱ》(北京：科学出版社，1987) 中找到.

Pontrjagin 空间上的算子代数是量子场论研究的有力工具，它的研究始于 20 世纪 60 年代末期. 首先研究的是数学家 M. A. Naimark 和 R. S. Ismagilov，以及后来的 V. S. Shulman，E. V. Kissin，A. I. Loginov，V. I. Liberzon 等学者. 我国的学者夏道行、严绍宗、童裕孙教授等对此也作出了系列研究. 前人研究的主要是 Pontrjagin 空间上的算子理论以及没有零性不变子空间的算子代数和交换的算子代数.

从现有文献看，Pontrjagin 空间上的算子代数的研究大致有以下几种途径：

1. 通过空间分解来研究具有某些特性的代数的结构，如研究交换对称的算子代数，研究非退化(包括不可约) 的算子代数等(以 M. A. Naimark，R. S. Ismagilov，V. S. Shulman，V. I. Liberzon 等为代表)；

2. 以导子和表示为工具来研究算子代数的结构(以 V. S. Shulman，E. V. Kissin 等为代表)；

3. 利用谱函数的方法研究算子代数的结构(以夏道行、童裕孙等为代表).

由于 Pontrjagin 空间与 Hilbert 空间的本质区别之一是它有零性子空间，因此该空间上有零性不变子空间的算子代数，更具有一般性. 事实上，没有零性不变子空间的算子代数在弱闭和一致闭的情况下分别与 Hilbert 空间上的 Von Neumann 代数和 C^* - 代数相联系. 而有零性不变子空间的算子代数，其性质与传统的 Von Neumann 代数和 C^* - 代数就大不相同了，如前所述，它具有全新的性质. 然而关于这种一般算子代数的研究却很少. Pontrjagin 空间上算子代数的许多深刻问题还有待进一步研究. 最近三十多年，Pontrjagin 空间上有零性不变子空间的算子代数的研究一直进展缓慢. 目前，在国内外尚未见到专门系统论述 Pontrjagin 空间上算子代数的专著. 本书就是研究这种有零性不变子空间的算子代数(称之为一般算子代数) 的分类、形式以及相关性质及应用.

著者在多年 Pontrjagin 空间上算子理论与算子代数方面研究工作总结的基础上形成这一部专著《Pontrjagin 空间上的算子代数》. 内容包括：Pontrjagin 空间及其上算子理论基础，

算子代数的基本概念，算子代数的对称理想与非对称理想，算子代数的分类与形式，算子代数的其他形式及弱闭、一致闭等价条件，算子代数的 C^* - 等价性，算子代数的导子与不变子空间，算子代数的抽象定义，Pontrjagin 空间上的算子代数理论的应用，条件正定与扩张，Pontrjagin 空间上的算子代数中进一步研究的公开问题. 本书最后是对 Pontrjagin 空间上的算子代数理论方面研究的主要文献进行评注.

本书可供大学数学、物理、力学专业高年级学生、研究生以及数学研究工作者阅读和参考. 阅读本书需要具有泛函分析、抽象代数、拓扑线性空间的基础知识，同时还要了解 Pontrjagin 空间的结构、不定度规空间上的算子理论以及 Hilbert 空间上经典算子代数的基本理论.

在本书的写作和出版过程中，得到出版社有关专家和编辑老师的关心和大力支持，在此一并表示衷心感谢!

书中不妥之处，恳请同行和读者批评指正.

杨海涛

2013 年 8 月

目 录

第一章
Pontrjagin 空间上算子代数的基本概念与进展

本章简要介绍Pontrjagin空间Π_k的概念、正规分解、零性子空间；介绍Π_k空间上的算子及算子代数的有关概念、对称算子代数、JVN-代数、JC*-代数的概念；介绍Π_1空间上的算子代数分类的有关结果，以及交换算子代数、非退化算子代数等有关结果.这些结果只给出结论，略去证明，可以在相应的参考文献中找到证明.

§1.1 Pontrjagin 空间及其算子基本概念

本节我们介绍 Pontrjagin 空间$\prod_k$的概念、零性子空间、正规分解，以及$\prod_k$空间上共轭算子的有关性质.

定义 1.1 令$\prod$是一个复向量空间，$[\cdot,\cdot]$是$\prod\times\prod$上的函数，称$(\prod,[\cdot,\cdot])$是一个不定度规空间，如果下列条件成立：

(1)$[x,y]=\overline{[y,x]}$对任意$x,y\in\prod$.

(2)$[\alpha x+\beta y,z]=\alpha[x,z]+\beta[y,z]$对任意$\alpha,\beta\in\mathbf{C}$，$x,y,z\in\prod$.

(3) 对任意$y\in\prod$，如果$[x,y]=0$，则有$x=0$.

这里的$[\cdot,\cdot]$称为不定度规，或不定内积.

对一个向量$x\in\prod$，如果$[x,x]=0$，则称之为零性向量. 由零性向量构成的子空间称为零性子空间. 类似地可以定义正子空间、负子空间和半正子空间($[x,y]\geqslant 0$)、半负子空间($[x,y]\leqslant 0$).

定义 1.2 令$(\prod,[\cdot,\cdot])$是一个不定度规空间. 如果$\prod$存在一个正子空间H_+和一个负子空间H_-满足

$$\prod=H_+\oplus H_-,$$

并且$(H_+,[\cdot,\cdot])$关于内积$[\cdot,\cdot]$是一个 Hilbert 空间，而$(H_-,-[\cdot,\cdot])$关于内积$-[\cdot,\cdot]$也是一个 Hilbert 空间，其中$[\cdot,\cdot]$和$-[\cdot,\cdot]$分别是不定内积在H_+与H_-上的限制. 此时称$(\prod,[\cdot,\cdot])$是一个完备的不定度规空间. 这里的分解称为完备的不定度规空间$\prod$的正则分解.

定义 1.3 令$(\prod,[\cdot,\cdot])$是一个复的不定内积空间，P是$\prod$的正子空间，N是$\prod$的负子空间，Z与Z^*是$\prod$的两个零性子空间. 如果$\prod$有分解：

$$\prod=N\oplus(Z+Z^*)\oplus P,$$

这里运算"$\oplus$"是指相应于内积$[\cdot,\cdot]$的直交和，而运算"$+$"是指线性和，则称此分解为空间$\prod$的正规分解.

定义 1.4 一个复的不定度规空间称为是 Pontrjagin 空间，如果在正则分解

$$\prod = H_+ \oplus H_-$$

中，H_- 是有限维的. 对于 Pontrjagin 空间，当 $\dim H_- = k < \infty$ 时，称之为$\prod_k$ 空间.

令$[\cdot,\cdot]$ 是$\prod_k$ 空间上的不定内积. 而$\prod_k$ 空间上的函数$(\cdot,\cdot)$：

$$(x,y) = [x_+,y_+] - [x_-,y_-],$$

其中

$$x = x_+ + x_-, y = y_+ + y_-,$$

或

$$x = x^+ + x^-, y = y^+ + y^-$$

是按正则分解给出的和式，称$(\cdot,\cdot)$ 是由正则分解诱导出的正定内积. $\prod_k$ 空间上算子 A 关于不定内积的共轭算子 $A^\#$ 定义如下：

$$[Ax,y] = [x,A^\# y], x,y \in \prod_k.$$

而算子 A 关于正定内积的共轭算子 A^* 定义如下：

$$(Ax,y) = (x,A^* y), x,y \in \prod_k.$$

度规算子是指算子

$$J = P_+ - P_-,$$

这里 P_+ 是$\prod_k$ 空间到 H_+ 上的投影，$P_- = I - P_+$. 于是有

$$JJ^* = J^* J = I.$$

对$\prod_k$ 空间上任意算子 A 有

$$A^\# = JA^* J.$$

§1.2 算子代数的基本概念

本节介绍$\prod_k$ 空间上算子代数的有关概念，包括：算子代数、子代数、非退化代数和一般

算子代数等.

$\prod_k$ 空间上的范数是按正定内积$(\cdot,\cdot)$确定的范数. 令 $B(\prod_k)$ 是$\prod_k$ 空间上所有有界线性算子的集合,$\mathcal{A}$是 $B(\prod_k)$ 的子代数.

定义 1.5 称算子代数$\mathcal{A}$是对称的,如果对任意的 $A\in\mathcal{A}$,有 $A^{\#}\in\mathcal{A}$;称$\mathcal{A}$是非退化的,如果$\mathcal{A}$没有零性不变子空间;而称$\mathcal{A}$是一般的算子代数,如果$\mathcal{A}$有零性不变子空间.

一个算子代数$\mathcal{A}$是闭的,是指$\mathcal{A}$按算子范数是闭的. 而算子范数是按正定内积$(\cdot,\cdot)$诱导的范数确定.

记$\prod_k$ 空间的正规分解如下:

$$\prod\nolimits_k=(Z\oplus H)+Z^*,$$

这里

$$H=N\oplus P=(Z+Z^*)^{[\perp]},$$

$(Z+Z^*)^{[\perp]}$ 是 $Z+Z^*$ 关于内积$[\cdot,\cdot]$的直交补,维数 $\dim Z\leqslant k$,维数 $\dim Z^*\leqslant k$. 如果 Z 的维数是 k,则 $N=0$,并且 $H=P$ 按内积$[\cdot,\cdot]$是一个 Hilbert 空间. 进而,可以通过适当选取零性子空间 Z^*,使得 Z 与 Z^* 有相同维数且按下述意义构成偶对. 即存在 Z 和 Z^* 的基 $\{x_i:i=1,2,\cdots,l\}$ 与$\{y_i:i=1,2,\cdots,l\}$,满足下列条件:

$$[x_i,y_j]=\delta_{ij},i,j=1,\cdots,l,$$

这里 l 是 Z 的维数. 容易看出 Z,Z^* 与 H 相对于内积$(\cdot,\cdot)$是相互直交的.

令$\mathcal{A}$是$\prod_k$ 空间上一般对称算子代数,则$\mathcal{A}$有零性不变子空间. 令 Z 是$\mathcal{A}$的维数最大的零性不变子空间,并设 $\dim Z=k$. 本书中考虑的就是这样的算子代数.

§1.3 JVN-代数与 JC*-代数

本节介绍 Pontrjagin 空间上 JVN-代数与 JC*-代数的概念,以及非退化 JVN-代数在酉等价意义下的结构.

Pontrjagin 空间$\prod_k$ 上的算子代数$\mathcal{A}$称为是 JC*-代数,如果$\mathcal{A}$是一致闭的,即按算子范数确定的拓扑是闭的,并且是对称的,即若 $A\in\mathcal{A}$,则 $A^*\in\mathcal{A}$;而称$\mathcal{A}$是 JVN-代数,如果

$\mathcal{A}$是弱闭的，即按弱算子拓扑是闭的，并且是对称的.

非退化JVN-代数$\mathcal{A}$酉等价于基本非退化代数的直和，即酉等价于下列代数：

$$W^* \oplus B(\Pi_l)^{(n)} \oplus B(H)^{(r,m)}.$$

这里W^*是一个具体的Von Neumann代数，$B(\Pi_l)^{(n)}$是Π_k型空间Π_l上所有有界线性算子全体构成的代数的n次直和，而$B(H)^{(r,m)}$为

$$\{A^{(r)} \oplus (T^* AT)^{(m)} \mid A \in B(H), T^* T = -I\},$$

其中H是一个有限维空间，$B(H)$是H上有界线性算子全体，$T \in B(H)$. 以上m,n,r都是非负整数.

这一结果在§1.7中还会详细描述.

§1.4 一般算子代数

本节首先给出Π_k空间上一般对称算子代数的简约，然后介绍Π_1空间上一般算子代数的分类概念和各类(六类)算子代数的形式. 这一分类称为Shulman分类.

令$\mathcal{A}$是Π_k空间上一般对称算子代数，Z是$\mathcal{A}$的最大零性不变子空间，Z^*是Z的对偶，则我们有Π_k空间的正规分解

$$\Pi_k = (Z \oplus H) + Z^*.$$

若$\dim Z = k' < k$，则H也是Π_k型的. 我们取H的一个正则分解$H = H_+ + H_-$，相应的度规算子为：

$$J_H = \begin{pmatrix} I_+ & \\ & -I_- \end{pmatrix},$$

这里$I_\pm$是$H_\pm$上的单位算子. 令

$$J' = \begin{pmatrix} I & & & \\ & I_+ & & \\ & & -I_- & \\ & & & I^* \end{pmatrix},$$

这里 I 与 I^* 分别是 Z 和 Z^* 上的单位算子. $|H|$是相应于度规算子 J_H 的 Hilbert 空间. 则 $J'\mathcal{A}J'$ 是$\prod_k$ 型空间

$$\prod_k{}' = (Z \oplus |H|) + Z^*$$

上一般的对称算子代数,并且 $J'\mathcal{A}J'$ 的最大零性不变子空间维数为 k'. 因此不妨假设$\prod_k$ 空间上一般对称算子代数$\mathcal{A}$的最大零性不变子空间维数为 k.

Pontrjagin 空间是有明确物理背景的空间. Pontrjagin 空间上的算子代数的研究是由 M. A. Naimark 引入的, 后来研究该代数的学者有 R. S. Ismagilov, V. S. Shulman, V. I. Liberzon, A. I. Loginov, E. V. Kissin, Daoxing Xia, Shaozong Yan, Yusun Tong 等. 一般来说研究 Pontrjagin 空间上的算子代数有下列三种方法:

1. 通过对 Pontrjagin 空间进行分解来研究算子代数的性质.
2. 通过研究算子代数的导子来研究算子代数的性质.
3. 用谱函数方法研究算子代数的性质.

Pontrjagin 空间与 Hilbert 空间是有本质区别的,所以 Pontrjagin 空间上的一般算子代数,即有零性不变子空间的算子代数不同于 Hilbert 空间上的算子代数. Pontrjagin 空间上一般对称算子代数的研究进展比较缓慢.

Pontrjagin 空间上一般算子代数的分类问题首先由 M. A. Naimark 引入,他研究的是考虑交换对称的算子代数的分类问题,而 Shulman 是研究指标为 1 的 Pontrjagin 空间$\prod_1$ 上一致闭的一般对称算子代数的分类问题,并给出各类算子代数的一般形式.

由于$\prod_k$ 空间与 Hilbert 空间的区别之一是它有零性子空间,因此$\prod_k$ 空间上的一般算子代数更具有一般性. 然而关于一般算子代数的研究却很少. Shulman 仅给出了$\prod_1$ 空间上一般对称算子代数的分类概念,并给出每类代数的一般形式.

令$\mathcal{A}$是$\prod_1$ 空间上的一般对称算子代数,Z 是$\mathcal{A}$的零性不变子空间,则 Z 的维数是 1. 对 $A \in \mathcal{A}$,设 $\lambda(\mathcal{A})$ 是代数$\mathcal{A}$的特征泛函,即满足 $Ax = \lambda(A)x$, x 是非正向量, A_0 是其核.

令 $H = Z^\perp \cap Z$,则投影 $p: Z^\perp \longrightarrow H$ 可确 H 中的内积

$$[p(x), p(y)] = (x, y), x, y \in Z^\perp,$$

对任意 $A \in \mathcal{A}$定义有界线性算子 $\widetilde{A}$ 为

$$\widetilde{A}(p(x)) = p(Ax).$$

映射 $A \longrightarrow \widetilde{A}$ 的核记为 $kerA$,该映射的象记为 $\widetilde{A}$.

定义 1.6 $\prod_1$ 空间上一般对称算子代数分为以下六类:

(1) $\mathcal{A}$是第 0 类的,若 $kerA=\{0\}$;

(2) $\mathcal{A}$是第 Ⅰ 类的,若$\{0\}\neq kerA\subset A_0$;

(3) $\mathcal{A}$是第 Ⅱ_a 类的,若 $kerA\neq\{0\}=A_0\cap kerA=A_0^*\cap kerA$;

(4) $\mathcal{A}$是第 Ⅱ_b 类的,若$\{0\}\neq A_0\cap kerA=A_0^*\cap kerA\neq kerA$;

(5) $\mathcal{A}$是第 Ⅲ_a 类的,若 $A_0\cap kerS\neq A_0^*\cap kerA,kerA\cap A_0\cap A_0^*=\{0\}$;

(6) $\mathcal{A}$是第 Ⅲ_b 类的,若 $A_0\cap kerA\neq A_0^*\cap kerA,kerA\cap A_0\cap A_0^*\neq\{0\}$.

定理 1.1　$\prod_1$ 空间上一般对称算子代数分为六类,各类代数的形式如下:

(1)0 类:

$$\left\{\begin{pmatrix}\lambda & & \\ & \lambda I_H+M & \\ & & \lambda\end{pmatrix}:\lambda\in\mathbf{C},M\in\mathcal{U}\right\},$$

其中 I_H 是 H 上的单位算子,且 $I_H\notin\mathcal{U}$,$\mathcal{U}$是 H 上的算子代数.

(2) Ⅱ_a、Ⅱ_b、Ⅲ_a 和 Ⅲ_b 类算子代数分别是:

$$\left\{\begin{pmatrix}\lambda & & \\ & M & \\ & & \lambda\end{pmatrix}:\lambda\in\mathbf{C},M\in\mathcal{U}\right\};$$

$$\left\{\begin{pmatrix}\lambda & y\otimes\xi & t \\ & M & \eta\otimes z \\ & & \lambda\end{pmatrix}:\lambda,t\in\mathbf{C},M\in\mathcal{U},y,z\in R\right\};$$

$$\left\{\begin{pmatrix}\lambda & & \\ & M & \\ & & \mu\end{pmatrix}:\lambda,\mu\in\mathbf{C},M\in\mathcal{U}\right\};$$

$$\left\{\begin{pmatrix}\lambda & y\otimes\xi & t \\ & M & \eta\otimes z \\ & & \mu\end{pmatrix}:\lambda,\mu,t\in\mathbf{C},M\in\mathcal{U},y,z\in R\right\}.$$

这里 R 是 H 的对$\mathcal{U}$不变的子空间,且 $I_H\in\mathcal{U}$.

(3) I 类:

$$\left\{\begin{pmatrix} \lambda & (q(M^*)+y+Pu)\otimes\xi & t \\ & \lambda I_H+M & \eta\otimes(q(M)+z+u) \\ & & \lambda \end{pmatrix}:\lambda,t\in\mathbf{C},M\in\mathcal{U},y,z\in R,u\in D\right\},$$

其中 $I_H \notin \mathcal{U}$,q 是$\mathcal{U}$到 H 的拟向量,即满足

$$q(AB)=Aq(B).$$

R 是 H 中直交于$q(\mathcal{U})$,且对$\mathcal{U}$不变的子空间,D 是 $Ker(\mathcal{U})$ 中直交于 R 的线性流形,P 是 D 上共轭线性算子,且 $P^2=I_D$.

由于上述分类定义方法直接依赖于$\prod_1$ 空间的特性,且定义本身过于复杂,不易推广,因此$\prod_k$ 空间上一般对称算子代数的分类问题的研究,虽然至今已有三十多年,但一直进展缓慢.

§1.5 交换代数的结构

本节介绍$\prod_k$ 空间上交换对称的算子代数的结构,该结果属于 Naimark. 因此这种结构也称为 Naimark 结构.

令$\mathcal{A}$是$\prod_k$ 空间上一个交换对称的算子代数,$\prod_k$ 空间有下列分解

$$\prod\nolimits_k=(Z+Z^*)\oplus H\oplus\prod,$$

其中 Z 是$\mathcal{A}$的零性不变子空间,Z^* 是与 Z 成对偶的零性子空间,H 是负子空间,$\prod$是正或负或$\prod_k$ 型空间.

$$Z=\sum\nolimits_{j=1}^{q}Z_j,$$

x_{jl},$l=1,\cdots,r_j$;$j=1,\cdots,q$ 是 Z_j 的基,$A\in\mathcal{A}$,并且

$$Ax_{jl}=\sum_{s=1}^{l}\lambda_{jls}(A)x_{js},$$

y_{jl},$l=1,\cdots,r_j$;$j=1,\cdots,q$ 是 Z^* 的基,并且

$$(x_{jl}, y_{j'l'}) = \delta_{jj'}\delta_{ll'}, h \in H, \pi \in \prod.$$

$$Ax_{jl} = \sum_{s=1}^{l} \lambda_{jls}(A) x_{js};$$

$$Ah = \sum_{j=1}^{q} \sum_{l=1}^{r_j} (h, h_{jl}) x_{jl} + A_1 h;$$

$$A\pi = \sum_{j=1}^{q} \sum_{l=1}^{r_j} (\pi, \pi_{jl}) x_{jl} + A_2 \pi;$$

$$Ay_{jl} = \sum_{\mu=1}^{q} \sum_{s=1}^{r_\mu} \alpha_{jl\mu s}^{*} x_{\mu s} + \sum_{\mu=l}^{r_j} \overline{\lambda}_{j\mu l}^{*} y_{j\mu} + h_{jl}^{*} + \pi_{jl}^{*}.$$

$A_1 \in \mathcal{A}_1, A_2 \in \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$分别是$\mathcal{A}$在 H 与$\prod$上的限制，$\alpha_{jl\mu s}$ 是$\mathcal{A}$上的数值函数，$h_{jl}(A)$ 与 $\pi_{jl}(A)$ 是$\mathcal{A}$上分别取值于 H 和$\prod$的向量值函数，并且满足下列对应关系：

$$\xi = \{\lambda_{jls}, \alpha_{jl\mu s}, h_{jl}, \pi_{jl}, A_1, A_2\},$$

$$\xi \longrightarrow \xi^{*} = \{\lambda_{jls}^{*}, \alpha_{jl\mu s}^{*}, h_{jl}^{*}, \pi_{jl}^{*}, A_1^{*}, A_2^{*}\}.$$

定义 1.7　满足上述关系的 ξ 的集合称为一个流形，并记为Ξ.

定理 1.2　$\prod_k$ 空间上交换对称的算子代数$\mathcal{A}$是由一个流形Ξ通过上述四个公式实现的. 反之，满足该组公式的流形Ξ，也确定$\prod_k$ 空间上一个交换对称的算子代数.

§1.6 投影 VN 化与 C* 化结构

本节介绍$\prod_k$ 空间上 JVN-代数与 JC*-代数的投影 VN 化与 C* 化的结构. 这些结果属于童裕孙先生.

设$\mathcal{A}$是空间$\prod_k$ 上的交换对称的 JVN-代数，Ω 是$\mathcal{A}$上非零可乘线性泛函全体，简称为$\mathcal{A}$的谱空间. Ω 按 W^{*} 拓扑是一个紧 Hausdorff 空间.

定义 1.8　设$\mathcal{A}$是空间$\prod_k$ 上的 JVN-代数，F 是定义于$\mathcal{A}$上的泛函，如果存在$\prod_k$ 上的非零非正元 x_0，使得对一切 $A \in \mathcal{A}$，均有 $Ax_0 = F(A)x_0$，则称 F 是$\mathcal{A}$的临界泛函.

引理 1.1　空间$\prod_k$ 上交换对称的 JVN-代数$\mathcal{A}$必存在临界泛函，临界泛函必属于谱空间 Ω，而且临界泛函的个数不超过 k.

定义 1.9　设$\mathcal{A}$是空间$\prod_k$ 上的交换对称的 JVN-代数，F 是$\mathcal{A}$的临界泛函，如果

$$\Phi_F(A)=\{x \mid \forall A\in\mathcal{A},\exists n=n(A),\ni(A-F(A)I)^n x=0\}$$

是空间$\prod_k$中的非退化子空间，则称 F 是非退化的临界泛函；否则，称 F 是退化的临界泛函.

定理 1.3 设$\mathcal{A}$是空间$\prod_k$上的交换对称的 JVN- 代数，F 是$\mathcal{A}$的唯一临界泛函，O_1 是 F 的任一邻域，则存在 F 的邻域 $O\in O_1$，和投影算子 $P\in\mathcal{A}$，使$(I-P)\prod_k$按$[\cdot,\cdot]$成为 Hilbert 空间，$\mathcal{A}(I-P)$为交换 Von Neumann 代数，而且当 $f\in O$ 时，有 $f(P)=0$.

定理 1.4 设$\mathcal{A}$是可析$\prod_k$空间上的交换的 JVN- 代数，谱空间为 Ω，F 是$\mathcal{A}$的唯一临界泛函，那么

(1) 存在定义于 Ω 的某个子集族上的集函数 ν，对 Ω 中闭包不含 F 的任何 Borel 集 $\overline{\Omega}$，ν 为 $\overline{\Omega}$ 上的有限正则 Borel 测度，而且 $C(\overline{\Omega})=L^{\infty}(\overline{\Omega},\nu)$；

(2) 如果 F 是非退化的，那么 ν 可以延拓为定义于 Ω 中一切 Borel 集上的有限测度；

(3) 如果存在 F 的邻域基$\{O_n\}$，使得

$$\lim_{n\to\infty}\nu(\Omega\backslash O_n)=\infty,$$

那么 F 必是退化的临界泛函.

定理 1.5 设$\mathcal{A}$是可析$\prod_k$空间上的交换的 JVN- 代数，F 是$\mathcal{A}$的临界泛函，$\{\Delta_n\}$是 Ω 中包含 F 的一列单调下降 Borel 集组成的邻域基. 那么 F 是非退化临界泛函的充要条件是

$$s-\lim_{n\to\infty}E(\Delta_n)$$

存在.

定理 1.6 设$\mathcal{A}$是$\prod_k$空间上的交换的 JC*-代数，F 是$\mathcal{A}$的唯一临界泛函，则对 F 的任意邻域

$$O=\bigcap_{i=1}^{n}O(F,A_j,\varepsilon),$$

存在投影算子 $P\in\mathcal{A}'$，使得 $A(I-P)$是 Hilbert 空间$((I-P)\prod_k,[\cdot,\cdot])$上的交换 C*-代数，而且对任何 $x\in\mathcal{A}$，有

$$\sigma(x\mid_{(I-P)\prod_k})=\{f(x)\mid f\in A\backslash O\}.$$

§ 1.7 非退化代数的结构

本节介绍$\prod_k$空间上非退化 JVN- 代数的有关结果. 这种结果属于 Liberzon. 因此非退化

JVN-代数的这种结构也称为 Liberzon 结构.

设 $B(\prod_k)$ 是 $\prod_k$ 空间上有界线形算子全体. $T \in B(\prod_k)$, $latT$ 表示 T 的不变子空间全体. $E \in latT$, $T_{|E}$ 表示 T 在子空间 E 上的限制,令

$$(T)' = \{A \mid A \in B(\prod_k), AT = TA\}.$$

对 $n \in \mathbf{N}$ 定义 $T^{(n)} \in B(\prod_k^n)$ 为

$$T^{(n)}(\bigoplus_{i=1}^{n} x_i) = \bigoplus_{i=1}^{n} Tx_i.$$

令 S 是 $B(\prod_k)$ 的子集,并且

$$latS = \bigcap_{T\in S} latT, S' = \bigcap_{T\in S}(T)',$$

$$S^{(n)} = \{T^{(n)} \mid T \in S\}(n \in \mathbf{N}),$$

$$S_{|E} = \{T_{|E} \mid T \in S\}(E \in latS).$$

定理 1.7　如果 S 是 $B(\prod_k)$ 的非退化对称子代数,则 $S^{(n)}$ 也是非退化的.

定理 1.8　如果 S 是非退化对称代数,则

$$\overline{S}^{\omega} = \{A \mid A \in S'', AE_S = A\},$$

这里 $\overline{S}^{\omega}$ 是代数 S 的弱闭包, E_S 是代数 S 在 S 的值域上的投影.

推论 1　弱闭的非退化对称代数在不变子空间上的限制是弱闭的.

推论 2　$\prod_k$ 空间上弱闭非退化的对称算子代数在 $B(\prod_k)$ 中稠密.

定理 1.9　令 S 是 $\prod_k$ 上的非退化对称算子代数, R 是它的左理想,如果

$$A_0 \in S, KerR \subset KerA_0$$

则 $A_0 \in R^{\omega}$.

推论 3　如果 S 是 $\prod_k$ 上的非退化对称算子代数, R 是它的弱闭理想,则

$$R = \{A \mid A \in S, AM = 0\},$$

这里 $M = KerR$.

推论 4　如果 S 是 $\prod_k$ 上的非退化对称算子代数, U 是它的弱闭子代数, R 是 S 中的双侧理想,则 $R + U$ 在 S 中是弱闭的.

定理 1.10 令 S 是$\prod_k$ 上的非退化弱闭对称算子代数，并且

$$E \in latS, R(E) = \{A \mid A \in S, A_{|E} = 0\}, \hat{E} = KerR(E), \check{E} = E\hat{E}^{\perp},$$

则 $S = S_{|\hat{E}} \oplus S_{|\check{E}}$.

定理 1.11 任何一个非退化的弱闭算子代数酉等价于某些基本非退化代数的直和.

其中基本非退化代数是指下列三种代数：

(1)W^* - 代数.

(2) 代数 $B(\prod_l)^{(n)}$，指标 $l > 0, n \in \mathbf{N}$.

(3) 代数 $B(H)^{(r,m)}$，其中 H 是有限维空间，$r, m \in \mathbf{N}$，称之为奇异的.

$$B(H)^{(r,m)} = \{A^{(r)} \oplus (T^* AT)^{(m)} \mid A \in B(H), T^* T = -I, T\}.$$

定理 1.12 含单位元的非退化 JVN- 代数$\mathcal{A}$必是自反的，即

$$\mathcal{A} = \{A \mid A \in B(\prod_k), latA \subset latB\}.$$

§1.8 稠密性定理与约化代数

本节介绍$\prod_k$ 空间上的约化代数与稠密性定理，这些结果属于童裕孙先生.

定义 1.10 称一个算子代数是完全非退化的，如果它所包含的自共轭算子的特征子空间均非退化.

定理 1.13 含单位元的完全非退化 JVN- 代数是由它所包含的投影算子生成的.

定义 1.11 设$\mathcal{A}$是含单位元的弱闭代数，当 $A \in lat\ \mathcal{A}$时，$A \in lat\ \mathcal{A}^*$，其中

$$\mathcal{A}^* = \{C^* \mid C \in \mathcal{A}\},$$

则称$\mathcal{A}$为约化代数.

定理 1.14 设$\mathcal{A}$是非退化的约化代数，并且与$\mathcal{A}$可交换所有闭的稠定线性算子均有界，则$\mathcal{A}$不存在无穷多个相互直交的约化子空间.

定理 1.15 设$\mathcal{A}$是非退化的约化代数，并且$\mathcal{A}$的每个稠定算子均有界，则$\mathcal{A}' \subset (\mathcal{A}^*)'$.

定理 1.16 设$\mathcal{A}$是非退化的约化代数，并且$\mathcal{A}$的每个稠定算子均有界，则$\mathcal{A}$是 JVN-

代数.

定义 1.12　设 Q 是 $\prod_k$ 空间上一族有界线性算子，L 是 $\prod_k$ 的闭线形子空间. 如果 L 和 $L^{\perp}$ 都是 Q 中所有算子的不变子空间，则称 L 是 Q 的广义约化子空间. 如果除去平凡的子空间 $0,\prod_k$ 外，再没有广义约化子空间，则称 Q 是广义不可约的.

定理 1.17　假设 $\prod_k$ 空间是可析的，那么广义不可约的算子全体在 $B(\prod_k)$ 中按算子范数稠密，即在正则分解 $\prod_k = H_- \oplus H_+$ 产生得范数下稠密，即对任何 $C \in B(\prod_k)$，$\varepsilon > 0$，必存在广义不可约算子 C_1，使得 $\|C - C_1\| < \varepsilon$.

定理 1.18　$\prod_k$ 空间上广义不可约的 JVN- 代数必是 $B(\prod_k)$.

推论 5　生成 JVN- 代数 $B(\prod_k)$ 的算子全体在 $B(\prod_k)$ 中按算子范数稠密.

令 $\mathcal{A}$ 是 $\prod_k$ 空间上一个算子代数，且

$$\mathcal{A}_1 = \{A \mid A \in \mathcal{A}, \sigma(A^* A) \subset (|z| \leqslant 1)\},$$

用 $\overline{\mathcal{A}}^s$ 表示 $\mathcal{A}$ 的强闭包.

定理 1.19　令 $\mathcal{A}$ 是 $\prod_k$ 空间上一个范数闭对称算子代数，

$$\mathcal{M} = \overline{\mathcal{A}}^s, T \in \mathcal{M}, \sigma(T^* T) \subset (-1,1),$$

则 $T \in (\overline{\mathcal{A}_1})^s$.

定理 1.20　令 $\mathcal{A}$ 是 $\prod_k$ 空间上一个范数闭的对称算子代数，$\mathcal{M} = \overline{\mathcal{A}}^s$，则 $(\overline{\mathcal{A}_1})^s \supset \mathcal{M}_1$.

§ 1.9 二次交换性

本节介绍 $\prod_k$ 空间上算子与算子代数的交换性结果. 这些结果属于童裕孙先生.

前边的定理 1.8 说明对于 $\prod_k$ 空间上非退化的弱闭算子代数二次交换定理在一定条件下成立. 但对 $\prod_1$ 空间上一般的算子代数有下列结论.

定理 1.21　如果 $A_1, A_2, \cdots, A_m$ 是 $\prod_1$ 空间上有限个可交换的拟幂零自共轭算子，$\mathcal{A}$ 是由 $A_1, A_2, \cdots, A_m$ 及 I 生成的弱闭代数，则有 $\mathcal{A} = \mathcal{A}''$.

定义 1.13 设 A 是 $\prod_k$ 空间上自共轭算子，$\lambda_0 \in \sigma_p(A)$（点谱）. 如果相应 λ_0 的根子空间 $\Phi_{\lambda_0}(A)$ 中含有零性向量，那么称 λ_0 是 A 的广义临界点.

定理 1.22 设 $A_1, A_2, \cdots, A_m$ 是 $\prod_1$ 空间上有限个可交换自共轭算子. 如果相应于它们的广义临界点的根子空间都是非退化的，那么由它们生成的弱闭代数 $\mathcal{A} = \mathcal{A}''$.

第二章
算子代数的对称理想与非对称理想

本章首先给出一组 Shulman 意义下的六类算子代数，然后证明了非退化的 JC^*- 代数和非退化的 JVN- 代数的理想必是对称的．对退化的 JC^*- 代数给出两种对称的理想和两种非对称的理想．说明了II_1 空间上 JVN- 代数除了第三类代数外无非对称理想．最后构造两个关于 JC^*- 代数理想对称性的例子．

§ 2.1 Π_k 空间上的一组算子代数

本节给出一组 Shulman 意义下的六类算子代数. 在后面的章节中还会讨论并利用这组代数的形式.

C 表示复数集, M_k 表示 **C** 上的 $k \times k$ 矩阵代数. 令

$$Y = (y_1, y_2, \cdots, y_k), Z = (z_1, z_2, \cdots, z_k),$$

将有限秩算子

$$(y_1 \otimes e_1 + y_2 \otimes e_2 + \cdots + y_k \otimes e_k),$$

和

$$(e_1^* \otimes z_1 + e_2^* + \cdots + e_k^* \otimes z_k)$$

分别用 $Y \otimes \xi$ 和 $\eta \otimes Z$ 表示.

(1) 令 $\mathscr{U}$ 是 Hilbert 空间 H 上的算子 $*$-代数, I_H 是 H 上的单位算子, 并且 $I_H \notin \mathscr{U}$. 置

$$C^0(\mathscr{U}) = \left\{ \begin{pmatrix} tI_k & & \\ & tI_H + M & \\ & & tI_k \end{pmatrix} : t \in \mathbf{C}, \text{单位算子 } I_k \in M_k, M \in \mathscr{U} \right\}.$$

(2) 令 $\mathscr{U}$ 是 Hilbert 空间 H 上的算子 $*$-代数, I_H 是 H 上的单位算子, 并且 $I_H \notin \mathscr{U}$, $q_i: \mathscr{U} \longrightarrow H$, 是线性映射, 且满足:

$$q_i(AB) = Aq_i(B), A, B \in \mathscr{U}.$$

令 R_i 是 H 中对 $\mathscr{U}$ 不变的子空间, R_i 直交于 $q_i(\mathscr{U})$, D_i 直交于 R_i, P_i 是共轭线性算子, 且满足 $P_i^2 = I_{D_i}$, 这里 I_{D_i} 是 D_i 上的单位算子, $i = 1, 2, \cdots, k$. 设

$$R = R_1 \times R_2 \times \cdots \times R_k,$$

$$Q = q_1 \times q_2 \times \cdots \times q_k,$$

$$P = P_1 \times P_2 \times \cdots \times P_k,$$

$$D = D_1 \times D_2 \times \cdots \times D_k,$$

$M \in \mathscr{U}$，$\mathbf{M} = M \times M \times \cdots \times M$（$k$ 重积），

$$\mathbf{M}^* = M^* \times M^* \times \cdots \times M^*（k \text{ 重积}）.$$

置

$$C^1(\mathscr{U}, Q, R, D, P) = \left\{ \begin{pmatrix} tI_k & (Q(\mathbf{M}^*) + Y + Pu) \otimes \xi & T \\ & tI_H + M & \eta \otimes (Q(\mathbf{M}) + Z + u) \\ & & tI_k \end{pmatrix} \right.$$

$$\left. t \in \mathbf{C}, I_k \in M_k, \text{是单位矩阵}, T \in M_k, M \in \mathscr{U}, Y, Z \in R, u \in D \right\}$$

(3) 令$\mathscr{U}$是 Hilbert 空间 H 上算子 $*$ - 代数，I_H 是 H 上的单位算子，$I_H \in \mathscr{U}$. 子空间 $R_i \subset H$，是$\mathscr{U}$的不变子空间，$R = R_1 \times R_2 \times \cdots \times R_k$.

置

$$C^{2a}(\mathscr{U}) = \left\{ \begin{pmatrix} \Lambda & & \\ & M & \\ & & \Lambda \end{pmatrix} : \Lambda \in M_k, M \in \mathscr{U} \right\};$$

$$C^{2b}(\mathscr{U}, R) = \left\{ \begin{pmatrix} \Lambda & Y \otimes \xi & T \\ & M & \eta \otimes Z \\ & & \Lambda \end{pmatrix} : \Lambda, T \in M_k, M \in \mathscr{U}, Y, Z \in R \right\};$$

$$C^{3a}(\mathscr{U}) = \left\{ \begin{pmatrix} \Lambda & & \\ & M & \\ & & \Gamma \end{pmatrix} : \Lambda, \Gamma \in M_k, M \in \mathscr{U} \right\};$$

$$C^{3b}(\mathscr{U}, R) = \left\{ \begin{pmatrix} \Lambda & Y \otimes \xi & T \\ & M & \eta \otimes Z \\ & & \Gamma \end{pmatrix} : \Lambda, \Gamma, T \in M_k, M \in \mathscr{U}, Y, Z \in R \right\}.$$

$C^0(\mathscr{U})$，$C^1(\mathscr{U}, Q, R, D, P)$，$C^{2a}(\mathscr{U})$，$C^{2b}(\mathscr{U}, R)$，$C^{3a}(\mathscr{U})$，$C^{3b}(\mathscr{U}, R)$ 分别是 Pontrjagin 空间$\prod_k$ 上 Shulmann 意义的第 0，Ⅰ，Ⅱ_a，Ⅱ_b，Ⅲ_a 和 Ⅲ_b 类的一组一般对称算子

代数.

定义 2.1 令 q 是 Hilbert 空间 H 上算子 * - 代数 $\mathscr{U}$ 到 H 中的线性映射,算子网 $M_n \in \mathscr{U}$ 按一致(或弱算子)拓扑收敛于 $M \in \mathscr{U}$. 称 q 是对称(或弱对称)闭的,如果 $q(M_n)$ 和 $q(M_n^*)$ 分别收敛于 $q(M)$ 和 $q(M^*)$.

§2.2 对称理想与非对称理想

本节给出 $\prod_k$ 空间上 JC* - 代数的一系列对称理想和非对称理想. 这些理想在下一章 $\prod_k$ 空间上算子代数的分类中将会用到.

Hilbert 空间上 C* - 代数的理想都是对称的,但对 JC* - 代数来说这一结论一般不再成立,但有下面的结果.

引理 2.1 $\prod_k$ 空间上 Shulmann 意义的一组 JC* - 代数的理想有下列一些类型:

(1) $$\mathcal{M}_{01} = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda I_k & & \\ & \lambda I_H + M & \\ & & \lambda I_K \end{pmatrix} : \lambda \in \mathbf{C}, M \in \mathscr{U}_0 \right\};$$

$$\mathcal{M}_{02} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & & \\ & M & \\ & & 0 \end{pmatrix} : M \in \mathscr{U}_0 \right\}.$$

(2) $$\mathcal{M}_{11} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & T \\ & M & 0 \\ & & 0 \end{pmatrix} : T \in M_k, M \in \mathscr{U}_0 \right\};$$

$$\mathcal{M}_{12} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & Y \otimes \xi & T \\ & M & \eta \otimes Z \\ & & 0 \end{pmatrix} : T \in M_k, M \in \mathscr{U}_0, Y, Z \in R(Q(M), D) \right\}.$$

(3) $$\mathcal{M}_{21}^{a} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & & \\ & M & \\ & & 0 \end{pmatrix} : M \in \mathcal{M}_0 \right\};$$

$$\mathcal{M}_{22}^{a}=\left\{\begin{pmatrix}\Lambda & & \\ & M & \\ & & \Lambda\end{pmatrix}:\Lambda\in M_k^1,M\in\mathcal{M}_0\right\}.$$

（4）$\mathcal{M}_{21}^{b}=\mathcal{M}_{11}$；

$\mathcal{M}_{22}^{b}=\mathcal{M}_{12}$；

$$\mathcal{M}_{23}^{b}=\left\{\begin{pmatrix}\Lambda & Y\otimes\xi & T\\ & M & \eta\otimes Z\\ & & \Lambda\end{pmatrix}:\Lambda\in M_k^1,T\in M_k,M\in\mathcal{U}_0,Y,Z\in R\right\}.$$

（5）$\mathcal{M}_{31}^{a}=\mathcal{M}_{21}^{a}$；

$$\mathcal{M}_{32}^{a}=\left\{\begin{pmatrix}\Lambda & & \\ & M & \\ & & \Psi\end{pmatrix}:\Lambda\in M_k^1,\Psi\in M_k^2,M\in\mathcal{U}_0\right\};$$

$$\mathcal{M}_{33}^{a}=\left\{\begin{pmatrix}\Lambda & & \\ & M & \\ & & 0\end{pmatrix}:\Lambda\in M_k^1,M\in\mathcal{U}_0\right\};$$

$$\mathcal{M}_{34}^{a}=\left\{\begin{pmatrix}0 & & \\ & M & \\ & & \Psi\end{pmatrix}:\Psi\in M_k^2,M\in\mathcal{U}_0\right\}.$$

（6）$\mathcal{M}_{31}^{b}=\mathcal{M}_{11}$；

$\mathcal{M}_{32}^{b}=\mathcal{M}_{12}$；

$\mathcal{M}_{33}^{b}=\mathcal{M}_{23}^{b}$；

$$\mathcal{M}_{34}^{b}=\left\{\begin{pmatrix}\Lambda & & \\ & M & \\ & & \Psi\end{pmatrix}:\Lambda\in M_k^1,\Psi\in M_k^2,M\in\mathcal{U}_0\right\};$$

$$\mathcal{M}_{35}^{b}=\left\{\begin{pmatrix}\Lambda & Y\otimes\xi & T\\ & M & \eta\otimes Z\\ & & 0\end{pmatrix}:\Lambda\in M_k^1,T\in M_k,M\in\mathcal{U}_0,Y,Z\in \mathrm{R}\right\};$$

$$\mathcal{M}_{36}^{b}=\left\{\begin{pmatrix}0 & Y\otimes\xi & T\\ & M & \eta\otimes Z\\ & & \Psi\end{pmatrix}:\Psi\in M_k^2,T\in M_k,M\in\mathcal{U}_0,Y,Z\in \mathrm{R}\right\};$$

其中$\mathcal{U}_0$是$\mathcal{U}$的理想，$\mathcal{M}_k^1$，$\mathcal{M}_k^2\subseteq\mathcal{M}_k$是$\mathcal{M}_k$的理想. 并且$\mathcal{M}_{33}^a$，$\mathcal{M}_{34}^a$，$\mathcal{M}_{35}^b$，与$\mathcal{M}_{36}^b$四类理想是非对称的，其余理想都是对称的.

证明　$\mathcal{M}_{33}^a$，$\mathcal{M}_{34}^a$，$\mathcal{M}_{35}^b$，与$\mathcal{M}_{36}^b$非对称性的证明是相似的，只就$\mathcal{M}_{35}^b$来证明. 令

$$A=\begin{pmatrix}\Lambda & Y\otimes\xi & T\\ & M & \eta\otimes Z\\ & & 0\end{pmatrix},$$

则

$$A^{\#}=JA^{*}J=\begin{pmatrix}0 & Z\otimes\xi & T^{*}\\ & M^{*} & \eta\otimes Y\\ & & \Lambda^{*}\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{36}^{b},$$

所以$\mathcal{M}_{35}^b$不是对称的.

第 Ⅰ 类 JC*-代数中型如

$$\begin{pmatrix}0 & Q(M^{*})\otimes\xi & 0\\ & M & \eta\otimes Q(M)\\ & & 0\end{pmatrix}$$

和

$$\begin{pmatrix}0 & Pu\otimes\xi & 0\\ & M & \eta\otimes u\\ & & 0\end{pmatrix}$$

算子的 # 共轭算子分别是

$$\begin{pmatrix}0 & Q(M)\otimes\xi & 0\\ & M^{*} & \eta\otimes Q(M^{*})\\ & & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & Q(M^{**})\otimes\xi & 0\\ & M^{*} & \eta\otimes Q(M^{*})\\ & & 0\end{pmatrix}$$

和

$$\begin{pmatrix}0 & u\otimes\xi & 0\\ & M^{*} & \eta\otimes Vu\\ & & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & P(Pu)\otimes\xi & 0\\ & M^{*} & \eta\otimes Vu\\ & & 0\end{pmatrix},$$

其他情况的验证是类似的. 所以除了$\mathcal{M}_{33}^{a}$, $\mathcal{M}_{34}^{a}$, $\mathcal{M}_{35}^{b}$, 与$\mathcal{M}_{36}^{b}$四类理想外其余理想都是对称的.

定理 2.1　对$\prod_k$空间上一般 JC* - 代数,下列结论成立:

(1) 第 0、Ⅰ、$Ⅱ_a$ 和 $Ⅱ_b$ 类 JC* - 代数的理想都是对称的.

(2) 第 $Ⅲ_a$ 类 JC* - 代数中只有$\mathcal{M}_{33}^{a}$与$\mathcal{M}_{34}^{a}$两类理想是非对称的.

(3) 第 $Ⅲ_b$ 类 JC* - 代数中只有$\mathcal{M}_{35}^{b}$与$\mathcal{M}_{36}^{b}$两类理想是非对称的.

证明　由引理 2.1 立得.

§ 2.3 算子的共轭运算

本节给出$\prod_k$空间上一般算子代数中算子的表示与算子的共轭运算的表示. 这些表示的方法是贯穿本书的运算工具.

现在假设$\prod_k$空间有下列正规分解:

$$\prod\nolimits_k = (Z \oplus H) + Z^*,$$

这里$\dim Z = k$, H是 Hilbert 空间, Z^*是Z的对偶, 令$\{e_1, e_2, \cdots, e_k\}$是$Z$的直交基, $\{e_1^*, e_2^*, \cdots, e_k^*\}$是$Z^*$的直交基, 并且$\{e_1^*, e_2^*, \cdots, e_k^*\}$与$\{e_1, e_2, \cdots, e_k\}$构成偶对. 正规分解相应的度规算子为

$$J = \begin{pmatrix} & & J_1 \\ & I & \\ J_3 & & \end{pmatrix},$$

其中J_1与J_3满足:

$$J_1 e_i^* = e_i, J_3 e_i = e_i^*, i = 1, 2, \cdots, k.$$

于是有下列结果:

定理 2.2　令$\mathcal{A}$是$\prod_k$空间上的一般对称算子代数, 并且相应于$\prod_k$的正规分解有

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ & A_{22} & A_{23} \\ & & A_{33} \end{pmatrix} \in \mathcal{A},$$

则

(1) $A_{11} = \Lambda_A(\lambda_{ij}), \lambda_{ij} = [Ae_i, e_j^*], i,j = 1,2,\cdots,k$;

(2) $A_{33} = \Gamma_A(\mu_{ij}), \mu_{ij} = [Ae_i^*, e_j], i,j = 1,2,\cdots,k$;

(3) $A_{13} = T_A(t_{ij})J_1, t_{ij} = [Ae_i^*, e_j^*], i,j = 1,2,\cdots,k$;

(4) $A_{12} = \sum_{i=1}^{k}\alpha_i(A) \otimes e_i, \alpha_i(A) = PA^* e_i = A_{12}^* e_i, i = 1,2,\cdots,k$;

(5) $A_{23} = \sum_{i=1}^{k} e_i^* \otimes \beta_i(A), \beta_i(A) = PAe_i^* = A_{23} e_i^*, i = 1,2,\cdots,k$;

(6) $A_{22} = PAP|_H$,表示为 A_P;

(7) $$A^{\#} = \begin{pmatrix} \Gamma_A^*(\mu_{ij}) & \sum_{i=1}^{k}\beta_i(A) \otimes e_i & T_A^*(t_{ij}) \\ & A_P^* & \sum_{i=1}^{k} e_i^* \otimes \alpha_i(A) \\ & & \Lambda_A^*(\lambda_{ij}) \end{pmatrix};$$

这里 A_{11}, A_{13} 及 A_{33} 是 $k \times k$ 矩阵,P 是 H 上的投影.

证明 (1) ~ (6) 的证明是容易的,从略. 现证(7).

若

$$A = \begin{pmatrix} \Lambda_A(\lambda_{ij}) & \sum_{i=1}^{k}\alpha_i(A) \otimes e_i & T_A(t_{ij}) \\ & A_P & \sum_{i=1}^{k} e_i^* \otimes \beta_i(A) \\ & & \Gamma_A(\mu_{ij}) \end{pmatrix},$$

则

$$A^* = \begin{pmatrix} \Lambda_A(\overline{\lambda}_{ji}) & & \\ \sum_{i}^{k} e_i \otimes \alpha_i(A) & A_P^* & \\ J_3 T_A(\overline{t}_{ji}) & \sum_{i=1}^{k}\beta_i(A) \otimes e_i^* & \Gamma_A(\overline{\mu}_{ji}) \end{pmatrix},$$

且

$$A^{\#} = JA^{*}J^{*}$$

$$= \begin{pmatrix} & & J_1 \\ & I & \\ J_3 & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Lambda_A(\overline{\lambda}_{ji}) & & \\ \sum_{i=1}^{k} e_i \otimes \alpha_i(A) & A_P^{*} & \\ J_3 T_A(\overline{t}_{ji}) & \sum_{i=1}^{k} \beta_i(A) \otimes e_i^{*} & \Gamma_A(\overline{\mu}_{ji}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & & J_1 \\ & I & \\ J_3 & & \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} J_1 J_3 T_A(\overline{t}_{ji}) & J_1 \sum_{i=1}^{k} \beta_i(A) \otimes e_i^{*} & J_1 \Gamma_A(\overline{\mu}_{ji}) \\ \sum_{i=1}^{k} e_i \otimes \alpha_i(A) & IA_P^{*} & \\ J_3 \Lambda_A(\overline{\lambda}_{ji}) & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & & J_1 \\ & I & \\ J_3 & & \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} J_1 \Gamma_A(\overline{\mu}_{ji}) J_3 & J_1 \sum_{i=1}^{k} \beta_i(A) \otimes e_i^{*} I & J_1 J_3 T_A(\overline{t}_{ji}) J_1 \\ & IA_P^{*} I & \sum_{i=1}^{k} e_i \otimes \alpha_i(A) J_1 \\ & & J_3 \Lambda_A(\overline{\lambda}_{ji}) J_1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} J_1 \Gamma_A(\overline{\mu}_{ji}) J_1^{*} & \sum_{i=1}^{k} \beta_i(A) \otimes J_1 e_i^{*} & J_1 J_3 T_A(\overline{t}_{ji}) J_1 \\ & A_P^{*} & \sum_{i=1}^{k} J_1^{*} e_i \otimes \alpha_i(A) \\ & & J_3 \Lambda_A(\overline{\lambda}_{ji}) J_3^{*} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \Gamma_A^{*}(\mu_{ij}) & \sum_{i=1}^{k} \beta_i(A) \otimes e_i & T_A^{*}(t_{ij}) \\ & A_P^{*} & \sum_{i=1}^{k} e_i^{*} \otimes \alpha_i(A) \\ & & \Lambda_A^{*}(\lambda_{ij}) \end{pmatrix}.$$

§ 2.4 两个理想

本节给出$\prod_k$空间上一般算子代数的两类理想$\mathcal{M}_1\cap\mathcal{M}_2$与$\mathcal{M}_2$的结构. 这两类理想在一般算子代数的分类中起到关键作用,在第三章中将用到.

在讨论退化 JC* - 代数理想之前,先给出一般对称算子代数的一种分解及有关记号.

设$\mathcal{A}$是$\prod_k$空间上的退化对称算子代数,即$\mathcal{A}$有零性不变子空间. 令 Z 是$\mathcal{A}$的维数最大的零性不变子空间,由$\mathcal{A}$的对称性知 Z 的直交补 $Z^{\perp}$ 也是$\mathcal{A}$的不变子空间. 记

$$Z^{\perp}=L,L^{\perp}=Z^*,H=(Z+Z^*)^{\perp},$$

则得到空间$\prod_k$的正规分解

$$\prod\nolimits_k=(Z\oplus H)+Z^*,$$

相应的度规算子为

$$J=\begin{pmatrix} & & J_1\\ & I & \\ J_3 & & \end{pmatrix},$$

其中 I 为 H 上的单位算子,且有

$$J_1^*=J_3,J_1J_3=I_Z,J_3J_1=I_{Z^*}.$$

并且对任意算子 $X\in\mathcal{A}$,有下述分解

$$X=\begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} & X_{13}\\ & X_{22} & X_{23}\\ & & X_{33}\end{pmatrix}.$$

记$\mathcal{A}_P=\{X_{22}\mid X\in\mathcal{A}\}$,$P$是$\prod_k$到 H 上的直交投影,则由 Z 是$\mathcal{A}$的维数最大的零性不变子空间知$\mathcal{A}_p$是 H 上的对称的非退化算子代数. 令

$$\mathcal{M}_1=\{X\mid X\in\mathcal{A},X_{22}=0\},$$

$$\mathcal{M}_2 = \{X \mid X \in \mathcal{A}, X_{11} = X_{33} = 0\},$$

$$\mathcal{N}_1 = \{X \mid X \in \mathcal{A}, X_{11} = 0\},$$

$$\mathcal{N}_2 = \{X \mid X \in \mathcal{A}, X_{33} = 0\},$$

则显然有

$$\mathcal{M}_2 \subseteq \mathcal{N}_1, \mathcal{M}_2 \subseteq \mathcal{N}_2, \mathcal{N}_1 \cap \mathcal{N}_2 = \mathcal{M}_2.$$

1. $\mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_2$的结构

令 H 是一个 Hilbert 空间，现重新定义 H 上的线性运算和内积如下：

$$ax = \bar{a}x, a \in \mathbf{C}, x \in H,$$

$$(x,y)^{-} = \overline{(x,y)}.$$

则容易验证 H 按新的线性运算和内积也是一个 Hilbert 空间，记之为 $\overline{H}$. 现在定义 $\overline{H}$ 与 H 的直交和如下：

$$\overline{H} \oplus H = \{y \oplus z \mid y \in \overline{H}, z \in H\},$$

容易验证 $\overline{H} \oplus H$ 按下列运算也是一个 Hilbert 空间，

$$b(y \oplus z) + c(s \oplus t) = (\bar{b}y + \bar{c}s) \oplus (bz + ct),$$

$$(y \oplus z, s \oplus t) = (s,y) + (z,t),$$

$y, s \in \overline{H}, z, t \in H, b, c \in \mathbf{C}$.

在空间 $\overline{H} \oplus H$ 上定义算子 $\bar{I}: y \oplus z \longrightarrow z \oplus y$，则有，

$$(\bar{I}(y \oplus z), s \oplus t) = (\bar{I}(s \oplus t), y \oplus z).$$

令

$$H^{(k)} = H \times H \times \cdots \times H,$$

$$\overline{H}^{(k)} = \overline{H} \times \overline{H} \times \cdots \times \overline{H},$$

$$\bar{I}^{(k)} = \bar{I} \times \bar{I} \times \cdots \times \bar{I}.$$

对任意 $A \in \mathcal{A}$, $A \longrightarrow Y \oplus Z$ 是$\mathcal{A}$到$\overline{H}^{(k)} \oplus H^{(k)}$ 上的映射. 反之，对任意

$$Y \oplus Z \in \overline{H}^{(k)} \oplus H^{(k)},$$

$$Y = (y_1, y_2, \cdots, y_k),$$

及

$$Z = (z_1, z_2, \cdots, z_k),$$

定义映射 F 如下：

$$F: Y \oplus Z \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & \sum_{i=1}^{k} y_i \otimes e_i & 0 \\ & 0 & \sum_{i=1}^{k} e_i^* \otimes z_i \\ & & 0 \end{pmatrix}.$$

再令

$$Y \otimes \xi = \sum_{i=1}^{k} y_i \otimes e_i,$$

这里

$$Y = (y_1, y_2, \cdots, y_k), \xi = (e_1, e_2, \cdots, e_k);$$

$$\eta \otimes Z = \sum_{i=1}^{k} e_i^* \otimes z_i,$$

这里

$$\eta = (e_1^*, e_2^*, \cdots, e_k^*), Z = (z_1, z_2, \cdots, z_k).$$

若 D 是 H 的线性子空间，V 是 D 上共轭线性算子，且满足：

$$V^2 x = x, x \in D,$$

则 V 的图 $\{Vx \oplus x \mid x \in D\}$ 是 $\overline{H} \oplus H$ 中对 $\overline{I}$ 不变的子空间.

引理 2.2 (1) $F(Y \oplus Z)^{\#} = F(Z \oplus Y)$，并且 F 是有界线性映射.

(2) 若 $\mathcal{R} = R_1 \times R_2 \times \cdots \times R_k$ 是 $H^{(k)}$ 的子空间，则 $\overline{\mathcal{R}} \oplus \mathcal{R} = \{Y \oplus Z \mid Y, Z \in \mathcal{R}\}$ 是 $\overline{H}^{(k)} \oplus H^{(k)}$ 中对 $\overline{I}^{(k)}$ 不变的.

(3) 若 $\overline{H}^{(k)} \oplus H^{(k)}$ 的子空间 $\mathcal{V}$ 对算子 $\overline{I}^{(k)}$ 不变，则子空间 $\mathcal{V}$ 的直交补 $\mathcal{V}^{\perp}$ 对算子 $\overline{I}^{(k)}$ 也是

不变的.

(4) $\overline{H}^{(k)}\oplus H^{(k)}$ 的子空间$\mathcal{V}$对$\overline{I}^{(k)}$是不变的,当且仅当存在子空间$R\subseteq H^{(k)}$及$D\subseteq R^{\perp}$,以及 D 上的共轭线性算子 P,且 $P^2x=x,x\subseteq D$ 使得

$$\mathcal{V}=(\overline{R}\oplus R)\oplus\{Px\oplus x\mid x\in D\}.$$

证明 (1) 由 F 的定义和定理 2.2(7) 直接计算得到.

(2) 由$\overline{I}^{(k)}$ 的定义即得.

(3) 从$\overline{I}^{(k)}$ 的定义可得.

(4) 不失一般性,假设 $k=1$. 令 V 是 $\overline{H}\oplus H$ 的对 $\overline{I}$ 不变的子空间. 令

$$R=\{x\in H\mid 0\oplus x\in V\},$$

则 $\overline{R}\oplus R\subseteq V$. 置

$$D=\{x\in R^{\perp}\mid\exists\, g\in\overline{R}^{\perp}\ni(g,x)\in V\}.$$

对 $x\in D$,若 $g_1,g_2\in R^{\perp}$,使得$(g_1,x),(g_2,x)\in V$,则$(g_1-g_2,0)\in V$,所以$(0,g_1-g_2)\in V$. 于是 $g_1-g_2\in R$,因此 $g_1=g_2$. 所以映射

$$P:D\longrightarrow D,P(x)=g,(g,x)\in V$$

是有定义的. 因为

$$\lambda(g,x)=(\bar{\lambda}g,\lambda x),P(\lambda x)=\bar{\lambda}x,$$

所以 P 是共轭线性的,且有

$$(Px,x)\in V,x\in D,$$

$$(\overline{R}\oplus R)\oplus\{Px\oplus x\mid x\in D\}\subseteq V.$$

对 $v\in V\subseteq\overline{H}\oplus H$,有

$$v=(r_1,r_2)\oplus(x_1,x_2),$$

$$(r_1,r_2)\in\overline{R}\oplus R,$$

并且

$$(x_1,x_2)\in\overline{R}^{\perp}\oplus R^{\perp}.$$

因为$(x_1,x_2)\in V,x_2\in D$,且 $x_1=P(x_2)$,于是有

$$V=(\overline{R}\oplus R)\oplus\{Px\oplus x\mid x\in D\}.$$

反之，如果

$$V=(\overline{R}\oplus R)\oplus\{Px\oplus x\mid x\in D\},$$

因为

$$(x,Px)=(P(Px),P(x))\in V,x\in D,$$

所以 V 是对 I 不变的.

定理 2.3 令 $\mathcal{A}$ 是 $\prod_k$ 空间上一般对称算子代数. 若 $\mathcal{M}_1\cap\mathcal{M}_2\neq\{0\}$，则存在对 $\overline{I}^{(k)}$ 不变的子空间 $\mathcal{V}\in\overline{H}^{(k)}\oplus H^{(k)}$ 满足：

$$\mathcal{M}_1\cap\mathcal{M}_2=F(\mathcal{V})+\mathcal{J},$$

这里 $\mathcal{J}=\begin{pmatrix}0&0&T\\&0&0\\&&0\end{pmatrix}$，$T$ 属于 $k\times k$ 矩阵代数，$\mathcal{V}$ 如同引理 2.2(4)，$\mathcal{R}$ 和 $\mathcal{R}^{\perp}$ 是对 $*$-算子代数 $\mathcal{A}_p^{(k)}$ 不变的.

证明 令

$$\mathcal{V}=\{Y\oplus Z\mid Y\oplus Z\in\overline{H}^{(k)}\oplus H^{(k)},F(Y\oplus Z)\in\mathcal{M}_1\cap\mathcal{M}_2\}.$$

由 $\mathcal{M}_1\cap\mathcal{M}_2$ 的对称性和引理 2.2(1)，知 $\mathcal{V}\in\overline{H}^{(k)}\oplus H^{(k)}$ 是对 $\overline{I}^{(k)}$ 不变的. $\mathcal{V}$ 是 $\mathcal{R}$ 与 $\mathcal{D}$ 按引理 2.2(4) 产生的.

注意到

$$\begin{pmatrix}0&Y_1\otimes\xi&\\&0&\eta\otimes Z_1\\&&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&Y_2\otimes\xi&\\&0&\eta\otimes Z_2\\&&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&T\\&0&0\\&&0\end{pmatrix},$$

这里 T 是 $k\times k$ 矩阵. 由 $\mathcal{V}$ 的定义有

$$\mathcal{M}_1\cap\mathcal{M}_2=F(\mathcal{V})+\mathcal{J}.$$

若 $A\in\mathcal{A}$，$Y\oplus Z\in\mathcal{V}$，则由定理 2.2(7) 和直接计算，有

$$AF(Y \oplus Z) = \begin{pmatrix} \Lambda & A_{12} & A_{13} \\ & A_p & A_{23} \\ & & \Gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & Y \otimes \xi & \\ & 0 & \eta \otimes Z \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & \Lambda(Y \otimes \xi) & T \\ & 0 & A_p(\eta \otimes Z) \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

$$= F(\Lambda^{*(k)} Y \oplus A_p^{(k)} Z) + \mathcal{J}(T),$$

因此

$$F(\Lambda^{*(k)} Y \oplus A_p^{(k)} Z) \in \mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_2.$$

令 $Y = 0, Z \in \mathcal{R}$，则

$$F(0 \oplus A_p^{(k)} Z) \in \mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_2.$$

由引理 2.2(4) 有 $A_p^{(k)} Z \in \mathcal{R}$，所以$\mathcal{R}$对 $A_p^{(k)}$ 不变. 因 $A_p^{(k)}$ 是 $*$ - 代数，所以$\mathcal{R}^{\perp}$ 对 $A_p^{(k)}$ 也是不变的.

2. $\mathcal{M}_2$的结构

令 H 是一个 Hilbert 空间，$\mathcal{U}$ 是 H 上的算子代数，q 是$\mathcal{U}$ 到 H 的线性映射，称 q 是一个拟向量，如果

$$q(AB) = Aq(B),$$

对任意 $A, B \in \mathcal{U}$.

定理 2.4　令 $\mathcal{A}$ 是$\prod_k$ 空间上一般对称算子代数，设 $\Delta = \mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_2 \neq \{0\}$，则$\mathcal{M}_2 = \Delta + \mathcal{U}(Q)$，其中$\mathcal{U}(Q)$ 是下列元的集

$$\begin{pmatrix} 0 & \sum_{i=1}^{k} q_i(B^*) \otimes e_i & 0 \\ & B & \sum_{i=1}^{k} e_i^* \otimes q_i(B) \\ & & 0 \end{pmatrix},$$

这里 $B \in \mathcal{A}_p$，q_i 是算子代数$\mathcal{U}$ 到$\mathcal{R}^{\perp}$ 的拟向量.

证明 由定理 2.3,存在子空间$\mathcal{V}$,令$\mathcal{V}^{\perp}$是$\mathcal{V}$在$\overline{H}^{(k)}\oplus H^{(k)}$中的直交补,对$A\in\mathcal{M}_2$,令$Y_A\oplus Z_A$是相应于$A$的元,且

$$Y_A\oplus Z_A=(P_1(A)\oplus P_2(A))\oplus(Y\oplus Z),$$

这里$Y\oplus Z\in\mathcal{V}$,$P_1(A)$与$P_2(A)$分别是Y_A与Z_A在$\overline{H}^{(k)}$与$H^{(k)}$上的投影. $P_1(A)$与$P_2(A)$是由A_{22}唯一定义的. 令

$$B=F(Y\oplus Z)+T(A),A'=A-B,$$

则$B\in\Delta$,$A'\in\mathcal{M}_2$,且

$$Y_A'\oplus Z_A'=P_1(A)\oplus P_2(A)\in\mathcal{V}^{\perp}.$$

另一方面,由定理 2.2 知P_1是共轭线性的,P_2是线性的. 拟向量定义的条件是成立的,并且$P_2(A)=P_1(A^*)$.

现在令

$$Q=q_1\times q_2\times\cdots\times q_k,$$

$$Q(A)=P_2(A)\in\mathcal{V}^{\perp}\cap H^{(k)},$$

则$F(Y_A'\oplus Z_A')\in\mathcal{U}(Q)$,因此,$\mathcal{M}_2\subset\mathcal{U}(Q)+\Delta$.

反之,我们有$\Delta=\mathcal{M}_1\cap\mathcal{M}_2\subset\mathcal{M}_2$,$\mathcal{U}(Q)\subset\mathcal{M}_2(Q)$. 因此$\mathcal{U}(Q)+\Delta\subset\mathcal{M}_2$. 所以,$\mathcal{M}_2=(Q)+\Delta$.

§ 2.5 JVN- 代数与 JC* - 代数的理想

本节证明$\prod_k$空间上非退化的 JVN- 代数与非退化的 JC* - 代数都是对称的.

通常的 C* - 代数,即 Hilbert 空间上的一致闭算子代数,它的任意理想都是对称的. Pontrjagin 空间上的 JC* - 代数的理想一般不是对称的. 本节讨论算子代数理想的对称性条件问题. 证明了非退化的 JC* - 代数和非退化的 JVN- 代数的理想必是对称的.

定理 2.5 (1) 设$\mathcal{M}$是非退化 JVN- 代数$\mathcal{A}$的理想,则$\mathcal{M}$是对称的.

(2) 设$\mathcal{M}$是非退化的 JC* - 代数$\mathcal{A}$的理想,则$\mathcal{M}$是对称的.

证明　(1) 根据定理 1.11 的结论，$\mathcal{A}$酉等价于基本非退化代数的直和，即酉等价于下列代数：

$$W^* \oplus B(\prod_l)^{(n)} \oplus B(H)^{(r,m)},$$

这里 W^* 是一个具体的 Von Neumann 代数，$B(\prod_l)^{(n)}$ 是$\prod_k$ 型空间$\prod_l$ 上所有有界线性算子全体构成的代数的 n 次直和，而 $B(H)^{(r,m)}$ 为

$$\{A^{(r)} \oplus (T^* AT)^{(m)} \mid A \in B(H), T^* T = -I\},$$

其中 H 是一个有限维空间，$B(H)$是 H 上有界线性算子全体，$T \in B(H)$，以上 m,n,r 都是非负整数. 若$\mathcal{M}$是$\mathcal{A}$的理想，则$\mathcal{M}$是$\mathcal{A}$的子代数，从而有下述分解

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 \oplus \mathcal{M}_2 \oplus \mathcal{M}_3.$$

并且不难验证，这里的$\mathcal{M}_1$，$\mathcal{M}_2$，$\mathcal{M}_3$分别是代数 W^*，$B(\prod_l)^{(n)}$ 与 $B(H)^{(r,m)}$ 中的理想(它们当中可能有平凡的理想). 对任意 $A \in \mathcal{M}$有

$$A = A_1 \oplus A_2 \oplus A_3, A_i \in M_i (i = 1,2,3),$$

并且

$$A^* = A_1^* \oplus A_2^* \oplus A_3^* (i = 1,2,3),$$

其中 A_1^*，A_2^* 与 A_3^* 分别表示 A_1，A_2 与 A_3 在代数 W^*，$B(\prod_l)^{(n)}$ 与 $B(H)^{(r,m)}$ 中的共轭算子(这里的共轭符号"$*$"不作区别，下同). 如果能证明 $A_i^* \in \mathcal{M}_i (i=1,2,3)$，那么就有 $A^* \in \mathcal{M}$，也就证明$\mathcal{M}$是$\mathcal{A}$中的对称理想了.

为了叙述方便，不妨设 $m = n = r = 1$，并且

$$\mathcal{A} = W^* \oplus B(\prod_l) \oplus B(H)^{(1,1)}.$$

对此来证明 $A_i^* \in M_i (i = 1,2,3)$.

首先，由 W^* - 代数是 C^* - 代数及 C^* - 代数理想的对称性即知 $A_i^* \in \mathcal{M}_i (i=1,2,3)$. 其次，设空间$\prod_l$ 中算子 A 关于不定内积$[\cdot,\cdot]$的共轭为 $A^\#$，而关于正定内积$(\cdot,\cdot)$的共轭为 A^*，相应的度规算子为 J，且用 $|(\prod_l)|$ 表示$\prod_l$ 按$(\cdot,\cdot)$ 所成的 Hilbert 空间，则作为算子集合有 $B(\prod_l) = B|(\prod_l)|$. 由于 $B(\prod_l)$ 与 $B(|\prod_l|)$ 上的一致拓扑相同，因此，若$\mathcal{M}_2$是 $B(\prod_l)$ 的理想，则$\mathcal{M}_2$也是 $B(|\prod_l|)$ 的理想. 由 C^* - 代数理想的对称性知$\mathcal{M}_2$关于共轭运算"$*$"是对称的，即若 $A_2 \in \mathcal{M}_2$，则 $A_2^* \in \mathcal{M}_2$. 再注意到 $J \in B(\prod_l)$，于是有

$$A_2^{\#} = JA_2^* J \in \mathcal{M}_2,$$

所以$\mathcal{M}_2$作为 $B(\prod_l)$ 的理想也是对称的.

最后来证明,若 $A_3 \in \mathcal{M}_3$,则 $A_3^* \in \mathcal{M}_3$. 由

$$B(H)^{(1,1)} = \{A \oplus T^* AT \mid A \in B(H), T^* T = -I\},$$

知$\mathcal{M}_3$有分解$\mathcal{M}_3 = \mathcal{M}_{31} \oplus \mathcal{M}_{32}$,且

$$\mathcal{M}_{31} = \{A_\lambda \mid A_\lambda \in B(H), \lambda \in \Lambda\},$$

$$\mathcal{M}_{32} = \{T^* A_\lambda T \mid A_\lambda \in B(H), T^* T = -I\}.$$

其中 Λ 是指标集. 若$\mathcal{M}_3$是 $B(H)^{(1,1)}$ 的理想,则$\mathcal{M}_{31}$与$\mathcal{M}_{32}$分别是代数 $B(H)$ 与

$$\{T^* AT \mid A \in B(H), T^* T = -I\}$$

的理想. 同上述 $B(\prod_l)$ 中理想的对称性证明一样知道,若 $A_{31} \in \mathcal{M}_{31}$,则 $A_{31}^* \in \mathcal{M}_{31}$. 现在设 $A_{32} \in \mathcal{M}_{32}$,则有 $A_\lambda \in B(H)$, $\lambda \in \Lambda$,使 $A_{32} = T^* A_\lambda T$. 并且

$$\{A_\lambda \mid A_\lambda \in B(H), \lambda \in \Lambda\}$$

是 $B(H)$的某个理想$\mathcal{M}_{31}$. 而 $A_{32}^* = T^* A_\lambda^* T$. 再由 $J \in B(H)$ 便知 $A_{32}^* \in \mathcal{M}_{32}$. 于是若

$$A_3 = A_{31} \oplus A_{32} \in \mathcal{M}_3, A_{3i} \in \mathcal{M}_{3i}, (i = 1,2),$$

则有

$$A_3^* = A_{31}^* \oplus A_{32}^* \in \mathcal{M}_3,$$

即$\mathcal{M}_3$也是对称的. 综上(1) 得证.

(2) 用$\mathcal{A}^w$表示$\mathcal{A}$的弱闭包,$\mathcal{A}^w$显然是非退化的代数. 设 $T \in \mathcal{A}^w$,则存在 $T_n \in \mathcal{A}$,使 $T_n \xrightarrow{w} T$. 即对任意 $x, y \in \prod_k$,有

$$(T_n x, y) \longrightarrow (Tx, y), (n \longrightarrow \infty),$$

从而有

$$(x, T_n^* y) \longrightarrow (x, T^* y), (n \longrightarrow \infty).$$

所以 $T_n^* \xrightarrow{w} T^*$. 由于$\mathcal{A}$是对称的,有 $T_n^* \in \mathcal{A}$. 因此,$T^* \in \mathcal{A}^w$. 于是$\mathcal{A}^w$是非退化的 JVN- 代数. 由(1) 如果能够证明$\mathcal{M}$是$\mathcal{A}^w$的理想,则$\mathcal{M}$就是对称的.

下面说明$\mathcal{M}$是$\mathcal{A}^w$的理想. 对任意 $A \in \mathcal{M}$，由

$$(T_n x, y) \longrightarrow (Tx, y), (n \longrightarrow \infty)$$

有

$$(T_n Ax, y) \longrightarrow (TAx, y), (n \longrightarrow \infty)$$

及

$$(AT_n x, y) = (T_n x, A^* y) \longrightarrow (Tx, A^* y) = (ATx, y), (n \longrightarrow \infty),$$

对任意 $x, y \in \prod_k$ 成立. 所以

$$T_n A \xrightarrow{w} TA, AT_n \xrightarrow{w} AT.$$

而$\mathcal{M}$是$\mathcal{A}$的理想，有 $T_n A, AT_n \in \mathcal{A}$. 所以 $TA, AT \in \mathcal{M}^w$($\mathcal{M}$的弱闭包)，$\mathcal{M}$是一致闭的，从而是强闭的. 又因为理想$\mathcal{M}$必是凸集，所以$\mathcal{M}^w = \mathcal{M}$. 于是 $TA, AT \in \mathcal{M}$. 这就证明了$\mathcal{M}$也是$\mathcal{A}^w$的理想. 于是(2) 得证.

§2.6 算子代数理想对称性的条件

本节首先给出$\prod_k$空间上一般对称算子代数的对称理想与非对称理想，然后给出两个有关理想对称性的例子.

文献[53]证明了当JC*-代数理想中元素相应于零的特征子空间非退化，而且零不是该理想中自伴元的非完全正则临界点时，该理想必对称. 这里对一般的JC*-代数给出了两种对称的理想和两种非对称的理想. 最后通过构造两个例子说明了文献[53]中给出的JC*-代数理想对称性的条件不是必要的条件.

这里的理想均指一致闭的双侧理想.

定理 2.6　若$\mathcal{A}$是一般的JC*-代数，则

(1) $\mathcal{M}_i (i = 1,2)$ 是$\mathcal{A}$的对称理想.

(2) 若存在 $X \in \mathcal{N}_1$(或$\mathcal{N}_2$) 有 $X_{33} \neq 0$(或 $X_{11} \neq 0$)，则$\mathcal{N}_1$(或$\mathcal{N}_2$) 是$\mathcal{A}$的非对称理想.

证明 通过直接计算易知道$\mathcal{M}_i(i=1,2)$是$\mathcal{A}$的代数(不考虑拓扑)双侧理想.下面来说明$\mathcal{M}_i(i=1,2)$是一致闭的.设$\mathcal{A}$中的算子列

$$X_n=\begin{pmatrix}X_{11}^n & X_{12}^n & X_{13}^n\\ & X_{22}^n & X_{23}^n\\ & & X_{33}^n\end{pmatrix}$$

一致收敛于

$$X=\begin{pmatrix}X_{11} & X_{12} & X_{13}\\ & X_{22} & X_{23}\\ & & X_{33}\end{pmatrix}.$$

则由

$$\|X_{ij}\|\leqslant\|X\|(i,j=1,2,3.\ i\leqslant j),$$

知X_{ij}^n一致收敛于$X_{ij}(i,j=1,2,3.\ i\leqslant j)$.现在设$X_n\in\mathcal{M}_1$,且$X_n$一致收敛于$X$.因为$X_{22}^n=0(n=1,2,\cdots)$,所以$X_{22}=0$.于是$X\in\mathcal{M}_1$.即$\mathcal{M}_1$是一致闭的.同理可证$\mathcal{M}_2$是一致闭的.最后说明$\mathcal{M}_i(i=1,2)$是对称的.设$X_i\in\mathcal{M}_i(i=1,2)$,则

$$X_1^{\#}=JX_1^*J$$

$$=\begin{pmatrix} & & J_1\\ & I & \\ J_3 & & \end{pmatrix}\begin{pmatrix}X_{11} & X_{12} & X_{13}\\ & 0 & X_{23}\\ & & X_{33}\end{pmatrix}^*\begin{pmatrix} & & J_1\\ & I & \\ J_3 & & \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}J_1X_{33}^*J_3 & J_1X_{23}^* & J_1X_{13}^*J_1\\ & 0 & X_{12}^*J_1\\ & & J_3X_{11}^*J_1\end{pmatrix};$$

$$X_2^{\#}=JX_2^*J$$

$$=\begin{pmatrix} & & J_1\\ & I & \\ J_3 & & \end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & X_{12} & X_{13}\\ & X_{22} & X_{23}\\ & & 0\end{pmatrix}^*\begin{pmatrix} & & J_1\\ & I & \\ J_3 & & \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & J_1 X_{23}^* & J_1 X_{13}^* J_1 \\ & X_{22}^* & X_{12}^* J_1 \\ & & 0 \end{pmatrix},$$

其中“#”是$\mathcal{A}$中算子关于不定内积的共轭运算,“*”是关于正定内积的共轭运算.所以$X_i \in \mathcal{M}_i (i=1,2)$.

(2) 与(1)的证明类似,可以说明$\mathcal{N}_i (i=1,2)$是$\mathcal{A}$的理想,其非对称性是显然.

推论 1　设$\mathcal{A}$是一般的JC*-代数,$\mathcal{M}_i, \mathcal{N}_j (i,j=1,2)$的意义同上.则

(1) $\mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_2$是$\mathcal{A}$的对称理想.

(2) 在定理2.6(2)的条件下,$\mathcal{M}_1 \cap \mathcal{N}_j (j=1,2)$是$\mathcal{A}$的非对称理想.

(3) $\mathcal{M}_2 \cap \mathcal{N}_j (j=1,2)$是$\mathcal{A}$的对称理想.

证明　由定理2.6立得.

注:对于具体的JC*-代数,某些$\mathcal{M}_i, \mathcal{N}_j (i,j=1,2)$可能是平凡的.

例 2.1　在$\prod_1$空间上的JC*-代数$\mathcal{A}$中,

(1) 若$\mathcal{A}$是第0类的,则$\mathcal{M}_1=\{0\}$,$\mathcal{M}_2=\mathcal{N}_1=\mathcal{N}_2=\mathcal{U}$,$\mathcal{U}$是C*-代数.

(2) 若$\mathcal{A}$是第Ⅰ类的,则$\mathcal{M}_1=\mathcal{M}_1\cap\mathcal{M}_2$,$\mathcal{N}_1=\mathcal{N}_2=\mathcal{M}_2$.

(3) 若$\mathcal{A}$是第Ⅱ$_a$类的,则$\mathcal{M}_1$同构于$\mathbf{C}$,$\mathcal{N}_1=\mathcal{N}_2=\mathcal{M}_2=\mathcal{U}$,$\mathcal{U}$是C*-代数.

(4) 若$\mathcal{A}$是第Ⅱ$_b$类的,则$\mathcal{M}_i (i=1,2)$都是$\mathcal{A}$的真理想,$\mathcal{N}_1=\mathcal{N}_2=\mathcal{M}_2$.

(5) 若$\mathcal{A}$是第Ⅲ$_a$类的,则$\mathcal{M}_1$同构于$\mathbf{C}\oplus\mathbf{C}$,$\mathcal{M}_2=\mathcal{U}$,$\mathcal{U}$是C*-代数.$\mathcal{N}_1$与$\mathcal{N}_2$都是$\mathcal{A}$的非平凡的非对称理想.

(6) 若$\mathcal{A}$是第Ⅲ$_b$类的,则$\mathcal{M}_i (i=1,2)$都是$\mathcal{A}$的真理想.$\mathcal{N}_1$与$\mathcal{N}_2$都是$\mathcal{A}$的非平凡的非对称理想.

定理 2.7　设$\mathcal{A}$是$\prod_1$空间上的JC*-代数,则

(1) 若$\mathcal{A}$是第0,Ⅰ或Ⅱ类的,则$\mathcal{A}$无非对称的理想.

(2) 若$\mathcal{A}$是第Ⅲ类的,则$\mathcal{A}$存在非平凡的非对称理想.

在文献[53]中,给出了这样的结果:设$\mathcal{A}$是Protrjagin空间上JC*-代数,J是$\mathcal{A}$的理想.如果J中元素相应于0的特征子空间非退化,而且0不是J中自共轭元的非完全正则临界点,则J是对称的.这里指出该定理中的两个条件不是必要的条件.

例 2.2　取$\prod_1$空间上相对于正规分解

$$\prod\nolimits_1 = (Z \oplus H) \dotplus Z^*$$

的第 III_b 类 JC^* - 代数

$$\mathcal{A}=\left\{\begin{pmatrix}\lambda & \cdot & t\\ & M & \\ & & \mu\end{pmatrix}:\lambda,\mu,t\in\mathbf{C},M\in\mathcal{U}\right\},$$

其中$\mathcal{U}$是 Hilbert 空间上的 C^* - 代数. $I_H\in\mathcal{U}$,则

$$\mathcal{M}_2=\left\{\begin{pmatrix}0 & & t\\ & M & \\ & & 0\end{pmatrix}:t\in\mathbf{C},M\in\mathcal{U}\right\},$$

于是$\mathcal{M}_2$是$\mathcal{A}$的对称理想,下面说明该理想中元素相应于 0 的特征子空间是退化的.

设 $X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\in\prod_1$,其中 $x_1\in Z,x_2\in H,x_3\in Z^*$. 取$\mathcal{A}$中算子

$$\mathrm{A}=\begin{pmatrix}0 & & t\\ & I & \\ & & 0\end{pmatrix},t\in\mathbf{C},t\neq 0,$$

其中 I 是$\mathcal{U}$中的单位元.

若 $Ax=0$,则有

$$\begin{pmatrix}0 & & t\\ & I & \\ & & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix},$$

即有 $tx_3=0,x_2=0,x_1\in Z$,由 $t\neq 0$ 知 $x_3=0$. 这说明理想$\mathcal{M}_2$中元素 A 相应于 0 的特征子空间是退化的子空间 Z.

例 2.3 取$\prod_1$ 空间上相对于正规分解

$$\prod\nolimits_1=(Z\oplus H)+Z^*$$

的第 III_b 类 JC^* - 代数

$$\mathcal{A}=\left\{\begin{pmatrix}\lambda & y\otimes\xi & t\\ & M & \eta\otimes Z\\ & & \mu\end{pmatrix}:\lambda,\mu,t\in\mathbf{C},M\in\mathcal{U},y,z\in R\right\},$$

其中$\mathcal{U}$是 Hilbert 空间 H 上的 C^* - 代数，$I_H \in \mathcal{U}$，R 是 H 中对$\mathcal{U}$不变的子空间，ξ 与 η 分别是 Z 与 Z^* 中的标准正交基. 取$\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_2$，即

$$\mathcal{M} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & y \otimes \xi & t \\ & 0 & \eta \otimes y \\ & & 0 \end{pmatrix} : t \in \mathbf{C}, y, z \in R \right\}.$$

由定理 2.6 的推论 1 知$\mathcal{M}$是$\mathcal{A}$的对称理想. 接下来说明该理想不满足条件："0 不是$\mathcal{M}$中自共轭元的非完全正则临界点".

取 $A \in \mathcal{A}$，且

$$A = \begin{pmatrix} 0 & y \otimes \xi & \alpha \\ & 0 & \eta \otimes y \\ & & 0 \end{pmatrix},$$

其中 α 为实数，则 A 是自共轭元. 令 $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \prod_1$，$x_1 \in Z$，$x_2 \in H$，$x_3 \in Z^*$. 若 $Ax = 0$，则有

$$\begin{pmatrix} 0 & y \otimes \xi & \alpha \\ & 0 & \eta \otimes y \\ & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

即

$$\begin{cases} (y \otimes \xi) \cdot x_2 + \alpha x_3 = 0, \\ (\eta \otimes y) \cdot x_3 = 0, \end{cases}$$

或

$$\begin{cases} (x_2, y) \cdot \xi + \alpha x_3 = 0, \\ (x_3, \eta) \cdot y = 0. \end{cases}$$

设 $x_3 = k\eta$，则有

$$\begin{cases} (x_2, y) \cdot \xi + k\alpha \cdot \eta = 0, \\ k \cdot y = 0. \end{cases}$$

分两种情况：① 若 $y\neq 0$，则 $k=0$，即 $x_3=0$，于是 $x_2\perp y$. 此时 $x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\0\end{pmatrix}$，其中 $x_1\in Z, x_2\perp y$.

② 若 $y=0$，则 $x_3=0$. 此时 $x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\0\end{pmatrix}$，$x_1\in Z, x_2\in H$. 另一方面，由于

$$\begin{pmatrix}0 & y\otimes\xi & \alpha\\ & 0 & \eta\otimes y\\ & & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & y\otimes\xi & \alpha\\ & 0 & \eta\otimes y\\ & & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & & (y,y)\\ & 0 & \\ & & 0\end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix}0 & & (y,y)\\ & 0 & \\ & & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & & (y,y)\\ & 0 & \\ & & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & & \\ & 0 & \\ & & 0\end{pmatrix},$$

因此 A 相应于 0 的根子空间为 $\prod_1$. 对于 $\mathcal{M}$ 中 $\begin{pmatrix}0 & & \alpha\\ & 0 & \\ & & 0\end{pmatrix}$（$\alpha$ 为实数）型自共轭元的情况是显然的. 所以 0 是对称理想 $\mathcal{M}$ 中自共轭元的非完全正则临界点.

第三章

算子代数的分类与形式

本章利用算子代数的对称理想和非对称理想给出Π_k空间上一般对称算子代数的分类定义. 将Π_k空间上一般算子代数分为六类, 通过研究分类概念中对称与非对称理想的性质与表示, 给出各类算子代数的形式, 并给出各类算子代数闭性的等价条件. 最后给出若干情形的算子代数的例子.

§3.1 算子代数分类的定义

本节利用对称理想与非对称理想给出$\prod_k$空间上一般对称算子代数的分类概念，提出一个 A(1,3) 性质.

令$\mathcal{A}$是$\prod_k$空间上一个一般算子代数. 置

$$\mathcal{M}_1 = \{A \mid A \in \mathcal{A}, A_{22} = 0\};$$

$$\mathcal{M}_2 = \{A \mid A \in \mathcal{A}, A_{11} = A_{33} = 0\};$$

$$\mathcal{N}_1 = \{A \mid A \in \mathcal{A}, A_{11} = 0\};$$

$$\mathcal{N}_2 = \{A \mid A \in \mathcal{A}, A_{33} = 0\}.$$

则

$$\mathcal{M}_2 \subseteq \mathcal{N}_1, \mathcal{M}_2 \subseteq \mathcal{N}_2, \mathcal{N}_1 \cap \mathcal{N}_2 = \mathcal{M}_2.$$

引理 3.1 令$\mathcal{A}$是$\prod_k$空间上一般对称算子代数. 则$\mathcal{M}_i$与$\mathcal{N}_i$($i = 1,2$) 是$\mathcal{A}$的理想. 并且$\mathcal{M}_i$是对称的，$i = 1,2$.

定义 3.1 令$\mathcal{A}$是$\prod_k$空间上一般对称算子代数，则称

(1) $\mathcal{A}$是第 0 类的，如果$\mathcal{M}_1 = \{0\}$.

(2) $\mathcal{A}$是第 Ⅰ 类的，如果$\mathcal{M}_1 \neq \{0\}$，并且$\mathcal{M}_1 \subseteq \mathcal{M}_2$.

(3) $\mathcal{A}$是第 Ⅱ 类的，如果$\mathcal{M}_1 \neq \{0\}$，$\mathcal{M}_1 \not\subset \mathcal{M}_2$，并且$\mathcal{N}_1 \cap \mathcal{M}_1 = \mathcal{N}_2 \cap \mathcal{M}_1$.

(4) $\mathcal{A}$是第 $Ⅱ_a$ 类的，如果$\mathcal{A}$是第 Ⅱ 类的，并且$\mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_2 = \{0\}$.

(5) $\mathcal{A}$是第 $Ⅱ_b$ 类的，如果$\mathcal{A}$是第 Ⅱ 类的，并且$\mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_2 \neq \{0\}$.

(6) $\mathcal{A}$是第 Ⅲ 类的，如果$\mathcal{M}_1 \neq \{0\}$，$\mathcal{M}_1 \not\subset M_2$ 并且$\mathcal{N}_1 \cap \mathcal{M}_1 \neq \mathcal{N}_2 \cap \mathcal{M}_1$.

(7) $\mathcal{A}$是第 $Ⅲ_a$ 类的，如果$\mathcal{A}$是第 Ⅲ 类，并且$\mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_2 = \{0\}$.

(8) $\mathcal{A}$是第 $Ⅲ_b$ 类的，如果$\mathcal{A}$是第 Ⅲ 类，并且$\mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_2 \neq \{0\}$.

定义 3.2 令$\mathcal{A}$是$\prod_k$空间上一般对称算子代数. 称$\mathcal{A}$具有 A(1,3) 性质，如果条件

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ & A_{22} & A_{23} \\ & & A_{33} \end{pmatrix} \in \mathcal{A}$$

蕴涵着

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & A_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{A}.$$

引理 3.2 令$\mathcal{A}$是$\prod_k$空间上具有$A(1,3)$性质的一般对称算子代数. 如果$\mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_2 = \{0\}$,则$\mathcal{A}$中的算子是对角的.

证明 令

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ & A_{22} & A_{23} \\ & & A_{33} \end{pmatrix} \in \mathcal{A},$$

则

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & A_{13} \\ & 0 & 0 \\ & & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_2 = \{0\}.$$

于是 $A_{13} = 0$.

因为

$$AA^{\#} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ & A_{22} & A_{23} \\ & & A_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{33}^* & A_{23}^* & 0 \\ & A_{22}^* & A_{12}^* \\ & & A_{11}^* \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} A_{11}A_{33}^* & A_{11}A_{23}^* + A_{12}A_{22}^* & A_{12}A_{12}^* \\ & A_{22}A_{22}^* & A_{22}A_{12}^* + A_{23}A_{11}^* \\ & & A_{33}A_{11}^* \end{pmatrix} \in \mathcal{A},$$

所以 $A_{12}A_{12}^* = 0$, $A_{12} = 0$. 同理有 $A_{23} = 0$.

令$\mathcal{A}$是一个算子代数,对

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ & A_{22} & A_{23} \\ & & A_{33} \end{pmatrix} \in \mathcal{A},$$

定义映射：

$$\phi_{11}:\mathcal{A}\longrightarrow B(Z),\phi_{11}(A)=A_{11};$$

$$\phi_{22}:\mathcal{A}\longrightarrow B(H),\phi_{22}(A)=A_{22};$$

$$\phi_{33}:\mathcal{A}\longrightarrow B(Z^*),\phi_{33}(A)=A_{33}.$$

用同样的方法也可以定义映射 $\phi_{ij}(A)=A_{ij},i\neq j$. 容易看出 $\phi_{ii}(i=1,2,3)$ 是代数同态.

§ 3.2 共轭结构

为了研究算子代数的结构，本节给出有关算子代数的共轭结构. 该结构是研究算子代数理想结构的基础.

令 Z^* 是 Z 的对偶. 令

$$H=(Z+Z^*)^{[\perp]},$$

这里 $\dim Z=k$，则 H 是一个 Hilbert 空间. 于是得到$\prod_k$ 空间的正规分解：

$$\prod\nolimits_k=(Z\oplus H)+Z^*.$$

由$\mathcal{A}$的对称性知，Z 相应于不定内积的直交补 $Z^{[\perp]}$ 也是$\mathcal{A}$的不变子空间. 于是 $Z\oplus H=Z^{[\perp]}$ 也是$\mathcal{A}$的不变子空间.

令$\{e_1,e_2,\cdots,e_k\}$ 是 Z 的直交基，$\{e_1^*,e_2^*,\cdots,e_k^*\}$ 是 Z^* 的直交基，并且是$\{e_1,e_2,\cdots,e_k\}$ 的对偶，即

$$[e_i,e_j]=\delta_{ij},i,j=1,\cdots,k.$$

选取算子 $J_1\in B(Z^*,Z),J_3\in B(Z,Z^*)$，且满足下列条件：

$$J_1e_i^*=e_i,J_3e_i=e_i^*,i=1,2,\cdots,k.$$

则度规算子 J 相应于正规分解具有下列形式：

$$J=\begin{pmatrix} & & J_1\\ & I & \\ J_3 & & \end{pmatrix},$$

这里 I 是 H 上的单位算子，且有

$$J_1^* = J_3, J_1 J_3 = I_Z, J_3 J_1 = I_{Z^*}.$$

由于 Z 和 $Z \oplus H$ 都是$\mathcal{A}$的不变子空间，因此对任意算子 $A \in \mathcal{A}$，有下列分解：

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ & A_{22} & A_{23} \\ & & A_{33} \end{pmatrix},$$

其中 A_{11}, A_{33} 和 A_{13} 是 $k \times k$ 矩阵. 因为 Z 与 Z^* 在 J_1 和 J_3 的作用下是同构的，所以我们可以把 $B(Z)$ 和 $B(Z^*)$ 中的算子等同对待. 于是

$$A^{\#} = JA^*J = \begin{pmatrix} A_{33}^* & A_{23}^* & A_{13}^* \\ & A_{22}^* & A_{12}^* \\ & & A_{11}^* \end{pmatrix}.$$

H 是一个 Hilbert 空间，令 $\overline{H}$ 是 H 的一个 Abelian 群. 在 $\overline{H}$ 上重新定义如下的数乘运算和内积：

$$\alpha \cdot x = \overline{\alpha} x, a \in \mathbf{C}, x \in H;$$

$$(x, y)^- = \overline{(x, y)},$$

则容易验证 $\overline{H}$ 构成一个 Hilbert 空间.

令

$$H^{(k)} = H \times H \times \cdots \times H,$$

$$\overline{H}^{(k)} = \overline{H} \times \overline{H} \times \cdots \times \overline{H}.$$

则$\overline{H}^{(k)} = \overline{H^{(k)}}$.

令

$$\xi = (e_1, e_2, \cdots, e_k),$$

$$\eta = (e_1^*, e_2^*, \cdots, e_k^*),$$

则对任意算子 $A \in \mathcal{A}$，有下列形式：

$$A=\begin{pmatrix}A_{11} & Y\otimes\xi & A_{13}\\ & A_{22} & \eta\otimes Z\\ & & A_{33}\end{pmatrix},$$

其中向量

$$Y=(y_1,y_2,\cdots,y_k)\in\overline{H^{(k)}},$$

$$Z=(z_1,z_2,\cdots,z_k)\in H^k,$$

算子

$$Y\otimes\xi=\sum\nolimits_{i=1}^{k}y_i\otimes e_i,$$

$$\eta\otimes Z=\sum\nolimits_{i=1}^{k}e_i^*\otimes z_i,$$

这里 $y_i\otimes e_i$ 与 $e_i^*\otimes z_i$ 都是 1 秩算子.

反之,定义一个线性映射

$$F:\overline{H}^{(k)}\oplus H^{(k)}\longrightarrow B(\textstyle\prod_k),$$

$$F(Y\oplus Z)=\begin{pmatrix}0 & \sum\limits_{i=1}^{k}y_i\otimes e_i & 0\\ & 0 & \sum\limits_{i=1}^{k}e_i^*\otimes z_i\\ & & 0\end{pmatrix},$$

这里

$$Y=(y_1,y_2,\cdots,y_k)\in\overline{H}^{(k)},$$

$$Z=(z_1,z_2,\cdots,z_k)\in H^{(k)}.$$

注:如果 Λ 是 $B(Z)$ 中的一个 $k\times k$ 矩阵,则 $\Lambda(Y\otimes\xi)=(\Lambda^*Y)\otimes\xi$.

取一个算子

$$\overline{I}:\overline{H}\oplus H\longrightarrow\overline{H}\oplus H,$$

$$\overline{I}(y\oplus z)=z\oplus y,$$

则

$$(\bar{I}(y \oplus z), s \oplus t) = (\bar{I}(s \oplus t), y \oplus z).$$

令 $I^{(k)} = I \times I \times \cdots \times I$($I$ 的 k 次乘积).

令 D 是 $H^{(k)}$ 的一个子空间,P 是 D 上共轭线性算子,且满足条件:$P^2 x = x, x \in D$. 容易看出 P 在$\overline{H}^{(k)} \oplus H^{(k)}$ 中的图像$\{Px \oplus x \mid x \in D\}$ 是对$\bar{I}^{(k)}$ 不变的.

在第二章已经证明,$\overline{H}^{(k)} \oplus H^{(k)}$ 的子空间 V 对$\bar{I}^{(k)}$ 是不变的,当且仅当存在子空间 $R \subseteq H^{(k)}$ 及 $D \subseteq R^{\perp}$,以及 D 上的共轭线性算子 P,且 $P^2 x = x, x \subseteq D$ 使得

$$V = (\overline{R} \oplus R) \oplus \{Px \oplus x \mid x \in D\}.$$

§3.3 一些引理

本节给出$\prod_k$ 空间上具有 $A(1,3)$ 性质的一般对称算子代数在各类(六类)代数情况下对称理想$\mathcal{M}_1$ 的结构与形式,这些结果是下一节给出一般算子代数形式的基础.

引理 3.3　令$\mathcal{A}$是$\prod_k$ 空间上具有 $A(1,3)$ 性质的一般对称算子代数. 设$\mathcal{M}_1 \neq \{0\}$,且

$$I = \{\Lambda \in B(Z) \mid \exists A \in \mathcal{M}_1, \exists \phi_{11}(A) = \Lambda\}.$$

(1) 如果$\mathcal{A}$是 Ⅱ_a 类的,则存在一个单同态 $\psi: I \longrightarrow B(Z^*)$,使得

$$\mathcal{M}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} \Lambda & & \\ & 0 & \\ & & \psi(\Lambda) \end{pmatrix} \mid \Lambda \in I \right\}.$$

(2) 如果$\mathcal{A}$是 Ⅱ_b 类的,则存在一个单同态 $\psi: I \longrightarrow B(Z^*)$,和两个映射

$$f_1 : I \longrightarrow \overline{H}^k$$

与

$$f_2 : I \longrightarrow H^k,$$

使得

$$\mathcal{M}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} \Lambda & (f_1(\Lambda) + Y) \otimes \xi & T \\ & 0 & \eta \otimes (f_2(\Lambda) + Z) \\ & & \psi(\Lambda) \end{pmatrix} \mid \Lambda \in I, T \in E, Y \oplus Z \in V \right\},$$

这里 $f_1(\Lambda) \oplus f_2(\Lambda) \in V^{\perp}$，

$$E = \{T \in B(Z^*, Z) \mid \exists A \in \mathcal{A}, \ni \phi_{13}(A) = T\},$$

$$V = \{Y \oplus Z \mid F(Y \oplus Z) \in \mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_2\}.$$

进而 f_1 是共轭线性映射，f_2 是线性映射.

(3) 如果 $\mathcal{A}$ 是 III_a 类的，则存在一个映射

$$\psi: I \longrightarrow B(Z^*),$$

使得

$$\mathcal{M}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} \Lambda & & \\ & 0 & \\ & & \psi(\Lambda) + \Gamma \end{pmatrix} \mid \Lambda \in I, \Gamma \in \widetilde{I} \right\},$$

这里

$$\widetilde{I} = \{\Gamma \in B(Z^*) \mid \exists A \in \mathcal{N}_1 \cap \mathcal{M}_1, \ni \phi_{33}(A) = \Gamma\}.$$

(4) 如果 $\mathcal{A}$ 是 III_b 类的，则存在映射

$$\psi: I \longrightarrow B(Z^*),$$

$$f_1: I \longrightarrow \overline{H}^k,$$

$$f_2: I \longrightarrow H^k,$$

$$g_1: \widetilde{I} \longrightarrow \overline{H}^k,$$

$$g_2: \widetilde{I} \longrightarrow H^k,$$

使得

$$\mathcal{M}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} \Lambda & (f_1(\Lambda) + g_1(\Gamma) + Y) \otimes \xi & T \\ & 0 & \eta \otimes (f_2(\Lambda) + g_2(\Gamma) + Z) \\ & & \psi(\Lambda) + \Gamma \end{pmatrix} \right\},$$

这里

$$f_1(\Lambda) \oplus f_2(\Lambda) \in V^{\perp},$$

$$g_1(\Gamma) \oplus g_2(\Gamma) \in V^{\perp},$$

$$\Lambda \in I, T \in E, \Gamma \in \tilde{I}, Y \oplus Z \in V,$$

并且 $E, \tilde{I}, V$ 是如上定义的，进而 g_1 是共轭线性映射，g_2 是线性映射.

证明　如果 $\mathcal{M}_1 \cap \mathcal{N}_1 = \mathcal{M}_1 \cap \mathcal{N}_2$，则容易看出这两个集合都是非空的.

(1) 设 $\mathcal{A}$ 是 II_a 类的，则 $\mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_2 = \{0\}$，由引理 3.2 知 A 中每个算子是对角的. 对 $\Lambda \in I$，令

$$A = \begin{pmatrix} \Lambda & & \\ & 0 & \\ & & \Gamma \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_1.$$

如果存在另外的元 $A' = \begin{pmatrix} \Lambda & & \\ & 0 & \\ & & \Gamma' \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_1$，则

$$A - A' = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & \Gamma - \Gamma' \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_1 \cap \mathcal{N}_1 = \{0\},$$

所以，$\Gamma = \Gamma'$. 于是由 $\psi(\Lambda) = \Gamma$ 可以定义映射

$$\psi: I \longrightarrow B(Z^*).$$

因为 $\mathcal{M}_1$ 是一个代数，所以 ψ 是一个单同态.

(2) 设 $\mathcal{A}$ 是 II_b 类的. 如同(1)中定义 ψ，它是一个单同态. 对 $\Lambda \in I$，令

$$A = \begin{pmatrix} \Lambda & Y \otimes \xi & 0 \\ & 0 & \eta \otimes Z \\ & & \psi(\Lambda) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_1.$$

置

$$V = \{Y \oplus Z \mid F(Y \oplus Z) \in \mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_2\}.$$

设

$$Y \oplus Z = (Y_1 \oplus Z_1) \oplus (Y_2 \oplus Z_2),$$

这里 $Y_1 \oplus Z_1 \in V^{\perp}$，$Y_2 \oplus Z_2 \in V$，则

$$A_1 = \begin{pmatrix} \Lambda & Y_1 \otimes \xi & 0 \\ & 0 & \eta \otimes Z_1 \\ & & \psi(\Lambda) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_1.$$

现定义映射

$$f_1 : I \longrightarrow \overline{H}^k$$

与

$$f_2 : I \longrightarrow H^k,$$

这里 $f_1(\Lambda) = Y_1$，$f_2(\Lambda) = Z_1$. 这两个映射是有定义的. 事实上，设

$$A'_1 = \begin{pmatrix} \Lambda & Y'_1 \otimes \xi & 0 \\ & 0 & \eta \otimes Z'_1 \\ & & \psi(\Lambda) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_1,$$

这里 $Y'_1 \oplus Z'_1 \in V^{\perp}$，则

$$A_1 - A'_1 = \begin{pmatrix} 0 & (Y_1 - Y'_1) \otimes \xi & 0 \\ & 0 & \eta \otimes (Z_1 - Z'_1) \\ & & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_2.$$

于是

$$(Y_1 - Y'_1) \oplus (Z_1 - Z'_1) \in V,$$

所以

$$(Y_1 - Y'_1) \oplus (Z_1 - Z'_1) \in V \cap V^{\perp} = \{0\},$$

这样有 $Y_1 = Y'_1$，$Z_1 = Z'_1$. 于是$\mathcal{M}_1$具有所述的形式.

(3) 设$\mathcal{A}$是 III_a 类的. 则$\mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_2 = \{0\}$，由引理 3.2 $\mathcal{A}$中每个算子是对角的. 对 $\Lambda \in I$，存在 Γ 满足

$$A = \begin{pmatrix} \Lambda & & \\ & 0 & \\ & & \Gamma \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_1.$$

因为$\mathcal{N}_1 \cap \mathcal{M}_1 \neq \mathcal{N}_2 \cap \mathcal{M}_1$，且两者都非$\{0\}$. 于是可以选取元

$$A' = \begin{pmatrix} \Lambda & & \\ & 0 & \\ & & \Gamma' \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_1.$$

这样就可以定义映射

$$\psi: I \longrightarrow B(Z^*),$$

与

$$\psi(\Lambda) = \Gamma'.$$

(4) 由(2) 和(3) 的证明及引理 2.2，现来证明映射 g_1 和 g_2 的存在性. 令

$$A_i = \begin{pmatrix} 0 & Y_i \otimes \xi & 0 \\ & 0 & \eta \otimes Z_i \\ & & \Lambda \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_1,$$

这里 $Y_i \oplus Z_i \in V^\perp, i = 1, 2$. 则

$$A_1 - A_2 = \begin{pmatrix} 0 & (Y_1 - Y_2) \otimes \xi & 0 \\ & 0 & \eta \otimes (Z_1 - Z_2) \\ & & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_2,$$

于是

$$(Y_1 - Y_2) \oplus (Z_1 - Z_2) \in V \cap V^\perp.$$

因此 $Y_1 = Y_2, Z_1 = Z_2$，并且 g_1 和 g_2 是有定义的.

§3.4 各类算子代数的形式

本节定义了六种类型的算子代数，进而证明每一种类型的算子代数恰与每一类算子代数对应，从而给出各类(六类) 算子代数的一般形式.

定义 3.3　令$\mathcal{A}, \mathcal{B}$是$\prod_k$空间上两个算子代数，$\phi: \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$是一个映射. 现定义两个

映射如下：

$$L_\phi: \mathcal{A}^2 \times C^2 \longrightarrow \mathcal{B},$$

$$L_\phi(M_1, M_2, \alpha, \beta) = \phi(\alpha M_1 + \beta M_2) - (\alpha\phi(M_1) + \beta\phi(M_2)),$$

$$T_\phi: A \times A \longrightarrow B,$$

$$T_\phi(M_1, M_2) = \phi(M_1 M_2) - \phi(M_1)\phi(M_2).$$

令$\mathcal{I} \subseteq \mathcal{B}$，称$\phi$是模$\mathcal{I}$线性的，如果$ImL_\phi \subseteq \mathcal{I}$；称$\phi$是模$\mathcal{I}$可乘的，如果$ImT_\phi \subseteq \mathcal{I}$；而称$\phi$是模$\mathcal{I}$同态，如果这两个映射都是模$\mathcal{I}$线性可乘的.

注意：ϕ是同态当且仅当$T_\psi = 0, L_\phi = 0$.

定义 3.4 令$\mathcal{A}, \mathcal{B}$是两个 ∗ - 代数，$\phi_1, \phi_2: \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$是两个映射. 定义映射

$$S_{ij}: \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B},$$

$$S_{ij}(M) = \phi_i(M)^* - \phi_j(M^*), i, j = 1, 2.$$

定义 3.5 令$\mathcal{A}$是 ∗ - 代数，H是一个 Hilbert 空间，$q_1, q_2: \mathcal{A} \longrightarrow H$是两个映射. 定义映射如下：

$$Q_{ij}: \mathcal{A} \longrightarrow H,$$

$$Q_{ij}(M) = q_i(M) - q_j(M^*), i, j = 1, 2.$$

1. 0 类算子代数

定义 3.6 令$\mathcal{B}$是$B(H)$的一个 ∗ - 子代数，

$$\phi: \mathcal{B} \longrightarrow B(Z)$$

是一个同态，

$$q: \mathcal{B} \longrightarrow \overline{H}^k$$

是一个共轭线性映射，

$$\theta: \mathcal{B} \longrightarrow B(Z^*, Z)$$

是一个线性映射，则称$(\mathcal{B}, \phi, q, \theta)$是 0- 型的，如果对任意$M_1, M_2 \in \mathcal{B}$，有

(i)$q(M_1 M_2) = \phi(M_1)^* q(M_2) + M_2^* q(M_1)$；

(ii)$\theta(M^*)=\theta(M)^*$；

$\theta(M_1M_2)=\phi(M_1)\theta(M_2)+q(M_2^*)^Tq(M_1^*)+\theta(M_1)\phi(M_2^*)^*$.

定理 3.1　令$\mathcal{A}$是$\prod_k$空间上一般对称算子代数. 则$\mathcal{A}$是 0 类的充分必要条件是存在 0- 型($\mathcal{B},\phi,q,\theta$)，使得

$$\mathcal{A}=\left\{\begin{pmatrix}\phi(M) & q(M)\otimes\xi & \theta(M)\\ & M & \eta\otimes q(M^*)\\ & & \phi(M^*)^*\end{pmatrix}\middle|\ M\in\mathcal{B}\right\}.$$

证明　设$\mathcal{A}$是 0 类的. 置

$$\mathcal{B}=\{M\mid \exists A\in\mathcal{A},\phi_{22}(A)=M\}.$$

对 $M\in\mathcal{B}$，令

$$A=\begin{pmatrix}\Lambda & Y\otimes\xi & T\\ & M & \eta\otimes Z\\ & & \Gamma\end{pmatrix}\in\mathcal{A}.$$

如果还有

$$A'=\begin{pmatrix}\Lambda' & Y'\otimes\xi & T'\\ . & M & \eta\otimes Z'\\ & & \Gamma'\end{pmatrix}\in\mathcal{A},$$

则 $A-A'\in\mathcal{M}_1=\{0\}$，即 $A=A'$. 于是可以定义映射：

$$\phi:\mathcal{B}\longrightarrow B(Z),\phi(M)=\Lambda,$$

$$\phi':\mathcal{B}\longrightarrow B(Z^*),\phi'(M)=\Gamma,$$

$$q:\mathcal{B}\longrightarrow \overline{H}^k,q(M)=Y,$$

$$q':\mathcal{B}\longrightarrow H^k,q(M)=Z,$$

$$T:\mathcal{B}\longrightarrow B(Z^*,Z),T(M)=T.$$

记

$$A = \begin{pmatrix} \phi(M) & q(M) \otimes \xi & \theta(M) \\ & M & \eta \otimes q'(M) \\ & & \phi'(M) \end{pmatrix}.$$

因

$$A^{\#} = \begin{pmatrix} \phi'(M)^* & q'(M) \otimes \xi & \theta(M)^* \\ & M^* & \eta \otimes q(M) \\ & & \phi(M)^* \end{pmatrix} \in \mathcal{A},$$

$$\phi'(M) = \phi(M^*)^*,$$

$$q'(M) = q(M^*).$$

直接验证验证$(\mathcal{B}, \phi, q, \theta)$是0-型的.

充分性是显然的.

2. Ⅰ类算子代数

定义3.7 令$\mathcal{B}$是$B(H)$的$*$-子代数,E是一个$k \times k$矩阵$*$-代数,V是$\overline{H}^k \oplus H^k$的对$\overline{I}^k$不变的子空间,

$$\phi: \mathcal{B} \longrightarrow B(Z)$$

是一个同态,而

$$q: \mathcal{B} \longrightarrow \overline{H}^k$$

是共轭线性映射,则称$(\mathcal{B}, E, V, \phi, q)$是Ⅰ-型的,如果对任意$M, M_1, M_2 \in \mathcal{B}$,$T \in E$,$(Y, Z) \in V$,并且有

(i)$\phi(M)T \in E$,$(\phi(M)^* Y, MZ) \in V$,$(q(M), q(M^*)) \in V^{\perp}$,

(ii) $(\phi(M_1)^* q_1(M_2) + M_2^* q_1(M_1) - q_1(M_1 M_2)$,

$$M_1 q_2(M_2) + \phi(M_2^*)^* q_2(M_1) - q_2(M_1 M_2)) \in V.$$

定理3.2 令$\mathcal{A}$是$\prod_k$空间上具有$A(1,3)$性质的一般对称算子代数.则$\mathcal{A}$是Ⅰ类的充分必要条件是存在一个Ⅰ-型$(\mathcal{B}, E, V, \phi, q)$使得

$$\mathcal{A}=\left\{\begin{pmatrix}\phi(M) & (q(M)+Y)\otimes\xi & T\\ & M & \eta\otimes(q(M^*)+Z)\\ & & \phi(M^*)^*\end{pmatrix}\middle| M\in\mathcal{B},T\in E,(Y,Z)\in V\right\}.$$

证明　设$\mathcal{A}$是 I 类的. 置

$$\mathcal{B}=\{M\mid \exists A\in\mathcal{A}\ni\phi_{22}(A)=M\},$$

$$E=\{T\mid \exists A\in\mathcal{A}\ni\phi_{12}(A)=T\},$$

$$V=\{Y\oplus Z\in\overline{H^k}\oplus H^k\mid F(Y\oplus Z)\in\mathcal{M}_1\cap\mathcal{M}_2\},$$

对 $M\in\mathcal{B}$，令

$$A=\begin{pmatrix}\Lambda & Y\otimes\xi & 0\\ & M & \eta\otimes Z\\ & & \Gamma\end{pmatrix}\in\mathcal{A},$$

因为$\mathcal{M}_1\neq\{0\}$，存在一个元

$$A'=\begin{pmatrix}\Lambda' & Y'\otimes\xi & 0\\ & M & \eta\otimes Z'\\ & & \Gamma'\end{pmatrix}\in\mathcal{A}$$

则

$$A-A'=\begin{pmatrix}\Lambda-\Lambda' & (Y-Y')\otimes\xi & 0\\ & 0 & \eta\otimes(Z-Z')\\ & & \Gamma-\Gamma'\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_1.$$

由$\mathcal{M}_1\subseteq\mathcal{M}_2$，有 $\Lambda=\Lambda'$，$\Gamma=\Gamma'$. 于是可以定义两个映射

$$\phi:\mathcal{B}\longrightarrow B(Z),\phi(M)=\Lambda,$$

$$\phi':\mathcal{B}\longrightarrow B(Z^*),\phi'(M)=\Gamma.$$

令

$$(Y,Z)=(Y_1,Z_1)\oplus(Y_2,Z_2),$$

这里$(Y_1,Z_1)\in V^{\perp}$，$(Y_2,Z_2)\in V$. 则

$$F(Y_2, Z_2) \in \mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_2,$$

并且

$$B = A - F(Y_2, Z_2)$$
$$= \begin{pmatrix} \phi(M) & Y_1 \otimes \xi & 0 \\ & M & \eta \otimes Z_1 \\ & & \phi'(M) \end{pmatrix} \in \mathcal{A}.$$

现在定义两个映射：

$$q: \mathcal{B} \longrightarrow \overline{H}^k, q(M) = Y_1,$$
$$q': \mathcal{B} \longrightarrow H^k, q'(M) = Z_1.$$

这两个映射是有意义的. 否则存在另外一个元

$$B' = \begin{pmatrix} \phi(M) & Y'_1 \otimes \xi & 0 \\ & M & \eta \otimes Z'_1 \\ & & \phi'(M) \end{pmatrix} \in A,$$

这里$(Y'_1, Z'_1) \in V^{\perp}$，则

$$B - B' = \begin{pmatrix} 0 & (Y_1 - Y'_1) \otimes \xi & 0 \\ & 0 & \eta \otimes (Z_1 - Z'_1) \\ & & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_2.$$

于是

$$(Y_1 - Y'_1, Z_1 - Z'_1) \in V.$$

所以

$$(Y_1 - Y'_1, Z_1 - Z'_1) \in V \cap V^{\perp} = \{0\}.$$

于是 $Y_1 = Y'_1, Z_1 = Z'_1$.

记

$$A = \begin{pmatrix} \phi(M) & (q(M) + Y) \otimes \xi & 0 \\ & M & \eta \otimes (q'(M) + Z) \\ & & \phi'(M) \end{pmatrix},$$

这里$(Y,Z)\in V$. 因为

$$A^{\#}=\begin{pmatrix}\phi'(M)^* & (q'(M)+Z)\otimes\xi & 0\\ & M^* & \eta\otimes(q(M)+Y)\\ & & \phi(M)^*\end{pmatrix}\in\mathcal{A},$$

并且$V^{\perp}$对$\bar{I}^k$不变，有

$$\phi'(M)=\phi(M^*)^*$$

及

$$q'(M)=q(M^*).$$

容易验证$(\mathcal{B},E,V,\phi,q)$是Ⅰ-型的.

充分性是显然的.

3. II_a类算子代数

定义 3.8　令$\mathcal{B}$是$B(H)$的一个$*$-子代数，$\mathcal{I}$是$B(Z)$的一个子代数，

$$\psi:\mathcal{I}\longrightarrow B(Z^*)$$

是一个单同态；

$$\phi_1:\mathcal{B}\longrightarrow B(Z)$$

与

$$\phi_2:\mathcal{B}\longrightarrow B(Z^*)$$

是两个映射. 称$(\mathcal{B},\mathcal{I},\psi,\phi_1,\phi_2)$为$\mathrm{II}_a$-型的，如果对任意$M\in\mathcal{B},\Lambda\in\mathcal{I}$，有

(i) $\phi_1(M)\Lambda,\Lambda\phi_1(M)\in\mathcal{I}$

$\psi(\phi_1(M)\Lambda)=\phi_2(M)\psi(\Lambda)$,

$\psi(\Lambda\phi_1(M))=\psi(\Lambda)\phi_2(M)$;

(ii) ϕ_1是模$\mathcal{I}$同态，并且

$$\psi\circ T_{\phi_1}=T_{\phi_2},\psi\circ L_{\phi_1}=L_{\phi_2};$$

(iii) $ImS_{21}\subseteq\mathcal{I},\psi\circ S_{21}=S_{12},\psi(\psi(\Lambda)^*)^*=\Lambda$.

注:ϕ_1 是同态当且仅当 ϕ_2 是同态,因为 ψ 是单射.

定理 3.3 令 $\mathcal{A}$ 是 $\prod_k$ 空间上具有 $A(1,3)$ 性质的一般对称算子代数. 则 $\mathcal{A}$ 是 Ⅱ$_a$ 类的充分必要条件是存在一个 Ⅱ$_a$- 型($\mathcal{B}$, $\mathcal{I}$, ψ, ϕ_1, ϕ_2) 使得

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} \phi_1(M) + \Lambda & & \\ & M & \\ & & \phi_2(M) + \psi(\Lambda) \end{pmatrix} \mid M \in \mathcal{B}, \Lambda \in \mathcal{I} \right\}.$$

证明 设 $\mathcal{A}$ 是 Ⅱ$_a$ 类的. 由引理 3.3 $\mathcal{A}$ 的每个元是对角的. 置

$$\mathcal{B} = \left\{ M \mid \exists \Lambda, \Gamma, \begin{pmatrix} \Lambda & & \\ & M & \\ & & \Gamma \end{pmatrix} \in \mathcal{A} \right\},$$

$$\mathcal{I} = \{\Lambda \mid \exists \Gamma, (\Lambda, 0, \Gamma) \in \mathcal{A}\},$$

这些集合都是非空的.

对 $M \in \mathcal{B}$,设

$$A = \begin{pmatrix} \Lambda & & \\ & M & \\ & & \Gamma \end{pmatrix} \in \mathcal{A}.$$

因为 $\mathcal{M}_1 \neq \{0\}$,可以取一个元

$$A' = \begin{pmatrix} \Lambda' & & \\ & M & \\ & & \Gamma' \end{pmatrix} \in \mathcal{A},$$

则

$$A - A' = \begin{pmatrix} \Lambda - \Lambda' & & \\ & 0 & \\ & & \Gamma - \Gamma' \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_1.$$

定义

$$\phi_1 : \mathcal{B} \longrightarrow B(Z), \phi_1(M) = \Lambda',$$

$$\phi_2 : \mathcal{B} \longrightarrow B(Z^*), \phi_2(M) = \Gamma',$$

则由引理 3.3(1)

$$A=\begin{pmatrix}\phi_1(M)+\widetilde{\Lambda} & & \\ & M & \\ & & \phi_2(M)+\psi(\widetilde{\Lambda})\end{pmatrix},\widetilde{\Lambda}\in\mathcal{I},$$

因$\mathcal{A}$是一个对称算子代数,容易验证($\mathcal{B}$,$\mathcal{I}$,ψ,ϕ_1,ϕ_2) 是 II_a- 型的. 并且

$$\mathcal{M}_1=\left\{\begin{pmatrix}\Lambda & & \\ & 0 & \\ & & \psi(\Lambda)\end{pmatrix}\mid\Lambda\in\mathcal{I}\right\}$$

是一个理想.

反之,如果

$$\mathcal{A}=\left\{\begin{pmatrix}\phi_1(M)+\Lambda & & \\ & M & \\ & & \phi_2(M)+\psi(\Lambda)\end{pmatrix}\mid M\in B,\Lambda\in\mathcal{I}\right\}$$

是相应于($\mathcal{B}$,$\mathcal{I}$,ψ,ϕ_1,ϕ_2) 的 II_a- 型代数,则容易验证$\mathcal{A}$是 II_a 类对称算子代数.

4. II_b 类算子代数

定义 3.9　令$\mathcal{B}$是 $B(H)$ 的一个 $*$ - 子代数,$\mathcal{I}$是 $B(Z)$ 的一个子代数,E 是一个 $k\times k$ 矩阵 $*$ - 代数,V 是$\overline{H}^k\oplus H^k$ 的对$\overline{\mathcal{I}}^k$ 不变的子空间. 令

$$\psi:\mathcal{I}\longrightarrow B(Z^*)$$

是一个同态;

$$f_1:\mathcal{I}\longrightarrow\overline{H}^k$$

是个共轭线性映射;

$$f_2:\mathcal{I}\longrightarrow H^k$$

是一个线性映射;

$$\phi_1:\mathcal{B}\longrightarrow B(Z),$$

$$\phi_2:\mathcal{B}\longrightarrow B(Z^*),$$

$$q_1: \mathcal{B} \longrightarrow \overline{H}^k$$

及

$$q_2: \mathcal{B} \longrightarrow H^k$$

是四个映射. 称$(\mathcal{B}, \mathcal{I}, E, V, \psi, f_1, f_2, \phi_1, \phi_2, q_1, q_2)$是 II_b- 型的，如果对任意

$$M, M_1, M_2 \in \mathcal{B}, \Lambda, \Lambda_1, \Lambda_2 \in \mathcal{I}, (Y, Z) \in V, T \in E,$$

有

(i) $(q_1(M), q_2(M)), (f_1(\Lambda), f_2(\Lambda)) \in V^{\perp}$,

$(0, \psi(\Lambda)Z), (\Lambda^* Y, 0), (M^* Y, \phi_2(M)Z), (\phi_1(M)^* Y, MZ) \in V$,

$T\phi_2(M), T\psi(\Lambda), \phi_1(M)T, \Lambda T \in E$;

(ii) $\phi_1(M)\Lambda, \Lambda\phi_1(M) \in \mathcal{I}$,

并且

$$\psi(\phi_1(M)\Lambda) = \phi_2(M)\psi(\Lambda), \psi(\Lambda\phi_1(M)) = \psi(\Lambda)\phi_2(M),$$

$$(\Lambda_1^* f_1(\Lambda_2) - f_1(\Lambda_1\Lambda_2), \psi(\Lambda_2) f_2(\Lambda_1) - f_2(\Lambda_1\Lambda_2)) \in V,$$

$$(\phi_1(M)^* f_1(\Lambda) - f_1(\phi_1(M)\Lambda), M f_2(\Lambda) + \psi(\Lambda) q_2(M) - f_2(\phi_1(M)\Lambda)) \in V,$$

$$(\Lambda^* q_1(M) + M^* f_1(\Lambda) - f_1(\Lambda\phi_1(M)), \phi_2(M) f_2(\Lambda) - f_2(\Lambda\phi_1(M))) \in V;$$

(iii) ϕ_1 是模 $\mathcal{I}$ 同态，

$$\psi \circ T_{\phi_1} = T_{\phi_2}, \psi \circ L_{\phi_1} = L_{\phi_2},$$

$$Im((L_{q_1} - f_1 \circ L_{\phi_1}) \oplus (L_{q_2} - f_2 \circ L_{\phi_1})) \subseteq V,$$

$$(\phi_1(M_1)^* q_1(M_2) + M_2^* q_1(M_1) - q_1(M_1 M_2) - f_1(T_{\phi_1}(M_1, M_2)),$$

$$M_1 q_2(M_2) + \phi_2(M_2) q_2 M_1 - q_2(M_1 M_2) - f_2(T_{\phi_1}(M_1, M_2))) \in V;$$

(iv) $\psi(\Lambda), \phi_2(M)^* - \phi_1(M^*) \in \mathcal{I}$,

并且

$$\psi(\psi(\Lambda)^*) = \Lambda^*,$$

$$f_1(\psi(\Lambda)^*) = f_2(\Lambda),$$

$$\psi(\phi_2(M)^* - \phi_1(M^*)) = \phi_1(M)^* - \phi_2(M^*),$$

$$f_1(\phi_2(M)^* - \phi_1(M^*)) = q_2(M) - q_1(M^*).$$

定理 3.4　令$\mathcal{A}$是$\prod_k$空间上具有$A(1,3)$性质的一般对称算子代数. 则$\mathcal{A}$是Ⅱ$_b$类的充分必要条件是存在一个Ⅱ$_b$-型

$$(\mathcal{B},\mathcal{I},E,V,\psi,f_1,f_2,\phi_1,\phi_2,q_1,q_2),$$

使得

$$\mathcal{A}=\left\{\begin{pmatrix}\phi_1(M)+\Lambda & (q_1(M)+f_1(\Lambda)+Y)\otimes\xi & T\\ & M & \eta\otimes(q_2(M)+f_2(\Lambda)+Z)\\ & & \phi_2(M)+\psi(\Lambda)\end{pmatrix}\right\},$$

这里$M\in\mathcal{B}$,$\Lambda\in\mathcal{I}$,$T\in E$,$(Y,Z)\in V$.

证明　假设$\mathcal{A}$是Ⅱ$_b$型的. 置

$$\mathcal{B}=\{M\mid\exists A\in\mathcal{A},\phi_{22}(A)=M\},$$

$$\mathcal{I}=\{\Lambda\mid\exists A\in\mathcal{M}_1,\phi_{11}(A)=\Lambda\},$$

$$E=\{T\mid\exists A\in\mathcal{A},\phi_{13}(A)=T\},$$

$$V=\{Y\oplus Z\in\overline{H}^k\oplus H^k\mid F(Y\oplus Z)\in\mathcal{M}_1\cap\mathcal{M}_2\}.$$

这些集合都是非空的.

对$M\in\mathcal{B}$,设

$$A=\begin{pmatrix}\Lambda & Y_0\otimes\xi & 0\\ & M & \eta\otimes Z_0\\ & & \Gamma\end{pmatrix}\in\mathcal{A},$$

因为$\mathcal{M}_1\neq\{0\}$,可以选取一个元

$$A'=\begin{pmatrix}\Lambda' & Y'\otimes\xi & 0\\ & M & \eta\otimes Z'\\ & & \Gamma'\end{pmatrix}\in\mathcal{A},$$

则$A-A'\in\mathcal{M}_1$.

设

$$Y' \oplus Z' = (Y'_1 \oplus Z'_1) \oplus (Y'_2 \oplus Z'_2),$$

其中 $Y'_1 \oplus Z'_1 \in V^{\perp}$，$Y'_2 \oplus Z'_2 \in V$. 现在定义下列映射：

$$\phi_1 : \mathcal{B} \longrightarrow B(Z), \quad \phi_1(M) = \Lambda',$$

$$\phi_2 : \mathcal{B} \longrightarrow B(Z^*), \quad \phi_2(M) = \Gamma',$$

$$q_1 : \mathcal{B} \longrightarrow \overline{H}^k, \quad q_1(M) = Y_1,$$

$$q_2 : \mathcal{B} \longrightarrow H^k, \quad q_2(M) = Z_1,$$

则

$$A = \begin{pmatrix} \phi_1(M) & q_1(M) \otimes \xi & 0 \\ & M & \eta \otimes q_2(M) \\ & & \phi_2(M) \end{pmatrix} + B,$$

这里 $B \in \mathcal{M}_1$.

由引理 3.3(2) 存在一个同态 $\psi: \mathcal{I} \longrightarrow B(Z^*)$ 和两个线性映射

$$f_1 : \mathcal{I} \longrightarrow \overline{H}^k$$

和

$$f_2 : \mathcal{I} \longrightarrow H^k,$$

满足

$$B = \begin{pmatrix} \Lambda & (f_1(\Lambda) + Y) \otimes \xi & T \\ & 0 & \eta \otimes (f_2(\Lambda) + Z) \\ & & \psi(\Lambda) \end{pmatrix}.$$

这里 $Y \oplus Z \in V$, $T \in E$. 所以 $\mathcal{A}$ 具有所述的形式. 由 $\mathcal{A}$ 是具有 $A(1,3)$ 性质的一般对称算子代数，容易验证($\mathcal{B}, \mathcal{I}, E, V, \psi, f_1, f_2, \phi_1, \phi_2, q_1, q_2$) 是 II_b- 型的. 并且

$$\mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & Y \otimes \xi & T \\ & 0 & \eta \otimes Z \\ & & 0 \end{pmatrix} \middle| \, Y \oplus Z \in V, T \in E \right\},$$

与

$$\mathcal{M}_1=\left\{\begin{pmatrix}\Lambda & (f_1(\Lambda)+Y)\otimes\xi & T\\ & 0 & \eta\otimes(f_2(\Lambda)+Z)\\ & & \psi(\Lambda)\end{pmatrix}\middle|\ \Lambda\in\mathcal{I},Y\oplus Z\in V,T\in E\right\}$$

是$\mathcal{A}$的一个理想.

充分性是显然的.

5. III_a 类算子代数

定义 3.10　令$\mathcal{B}$是$B(H)$的一个 $*$ - 子代数,$\mathcal{I}_1$是$B(Z)$的子代数,$\mathcal{I}_2$是$B(Z^*)$的子代数. 令

$$\psi:\mathcal{I}_1\longrightarrow B(Z^*),$$

$$\phi_1:\mathcal{B}\longrightarrow B(Z),$$

$$\phi_2:\mathcal{B}\longrightarrow B(Z^*)$$

是三个映射. 称$(\mathcal{B},\mathcal{I}_1,\mathcal{I}_2,\psi,\phi_1,\phi_2)$为 III_a- 型的,如果对任意,$M\in\mathcal{B},\Lambda\in\mathcal{I}_1,\Gamma\in\mathcal{I}_2$,有

(i)$\psi(\Lambda)\Gamma,\Gamma\psi(\Lambda),\phi_2(M)\Gamma,\Gamma\phi_2(M)\in\mathcal{I}_2$;

(ii) $\phi_1(M)\Lambda,\Lambda\phi_1(M)\in\mathcal{I}_1$,

$\psi(\phi_1(M)\Lambda)-\phi_2(M)\psi(\Lambda)$,

$\psi(\Lambda\phi_1(M))-\psi(\Lambda)\phi_2(M)\in\mathcal{I}_2$;

(iii)ϕ_1 是模$\mathcal{I}_1$同态,ψ是模$\mathcal{I}_2$同态,

并且

$$Im(\psi\circ T_{\phi_1}-T\phi_2),Im(\psi\circ L_{\phi_1}-L_{\phi_2})\subseteq\mathcal{I}_2;$$

(iv) $\Gamma^*,\psi(\Lambda)^*\in\mathcal{I}_1,\psi(\Gamma^*)\in\mathcal{I}_1$,

$\psi(\psi(\Gamma^*))-\Lambda^*\in\mathcal{I}_2,Im(\psi\circ S_{12}-S_{21})\subseteq\mathcal{I}_2$.

定理 3.5　令$\mathcal{A}$是$\prod_k$空间上具有$A(1,3)$性质的一般对称算子代数,则$\mathcal{A}$是 III_a 类的充分必要条件是存在一个 III_a- 型$(\mathcal{B},\mathcal{I}_1,\mathcal{I}_2,\psi,\phi_1,\phi_2)$,使得

$$\mathcal{A}=\left\{\begin{pmatrix}\phi_1(M)+\Lambda & & \\ & M & \\ & & \phi_2(M)+\psi(\Lambda)+\Gamma\end{pmatrix}\middle|\ M\in\mathcal{B},\Lambda\in\mathcal{I}_1,\Gamma\in\mathcal{I}_2\right\}.$$

证明　设$\mathcal{A}$是 III_a 类的. 由引理 3.3 知$\mathcal{A}$的每一个元是对角的. 置

$$\mathcal{B}=\{M \mid \exists \Lambda,\Gamma, \begin{pmatrix} \Lambda & & \\ & M & \\ & & \Gamma \end{pmatrix} \in \mathcal{A}\},$$

$$\mathcal{I}_1=\{\Lambda \mid \exists \Gamma, \begin{pmatrix} \Lambda & & \\ & 0 & \\ & & \Gamma \end{pmatrix} \in \mathcal{A}\},$$

$$\mathcal{I}_2=\{\Gamma \mid \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & \Gamma \end{pmatrix} \in \mathcal{A}\},$$

这些集合都不是空集.

对 $M \in \mathcal{B}$,设

$$A=\operatorname{diag}(\Lambda,M,\Gamma) \in \mathcal{A}$$

因$\mathcal{M}_1 \neq \{0\}$,可以取一个元

$$A'=\operatorname{diag}(\Lambda',M,\Gamma') \in \mathcal{A}$$

则

$$A-A'=\begin{pmatrix} \Lambda-\Lambda' & & \\ & 0 & \\ & & \Gamma-\Gamma' \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_1.$$

定义

$$\phi_1:\mathcal{B} \longrightarrow B(Z),\phi_1(M)=\Lambda'$$

及

$$\phi_2:\mathcal{B} \longrightarrow B(Z^*),\phi_2(M)=\Gamma'.$$

由引理 3.3(3),存在一个映射 $\psi:\mathcal{I}_1 \longrightarrow B(Z^*)$,满足

$$A = \begin{pmatrix} \phi_1(M) + \Lambda & & \\ & M & \\ & & \phi_2(M) + \psi(\Lambda) + \Gamma \end{pmatrix},$$

其中 $\Lambda \in \mathcal{I}_1, \Gamma \in \mathcal{I}_2$. 容易验证$(\mathcal{B}, \mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2, \psi, \phi_1, \phi_2)$是 III_a- 型的.

反之,如果

$$\mathcal{A} = \left\{ \begin{pmatrix} \phi_1(M) + \Lambda & & \\ & M & \\ & & \phi_2(M) + \psi(\Lambda) + \Gamma \end{pmatrix} \mid M \in \mathcal{B}, \Lambda \in \mathcal{I}_1, \Gamma \in \mathcal{I}_2 \right\}$$

是某个 III_a- 型$(\mathcal{B}, \mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2, \psi, \phi_1, \phi_2)$对应的算子代数,则容易验证$\mathcal{A}$是 III_a 类的.

6. III_b 类算子代数

定义 3.11　令$\mathcal{B}$是 $B(H)$ 的一个 $*$ - 子代数,$\mathcal{I}_1$是 $B(Z)$ 的一个子代数,$\mathcal{I}_2$是 $B(Z^*)$ 的子代数,E 是一个 $k \times k$ 矩阵代数,V 是$\overline{H}^k \oplus H^k$ 的子空间. 令

$$\psi: \mathcal{I}_1 \longrightarrow B(Z^*),$$

$$\phi_1: \mathcal{B} \longrightarrow B(Z),$$

$$\phi_2: \mathcal{B} \longrightarrow B(Z^*),$$

$$q_1: \mathcal{B} \longrightarrow \overline{H}^k,$$

$$q_2: \mathcal{B} \longrightarrow H^k,$$

$$f_1: \mathcal{I}_1 \longrightarrow \overline{H}^k,$$

$$f_2: \mathcal{I}_1 \longrightarrow H^k$$

是映射;

$$g_1: \mathcal{I}_2 \longrightarrow \overline{H}^k$$

是共轭线性映射;

$$g_2: \mathcal{I}_2 \longrightarrow H^k$$

是线性映射.$(\mathcal{B}, \mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2, E, V, \psi, f_1, f_2, \phi_1, \phi_2, q_1, q_2, g_1, g_2)$称为是一个 III_b- 型,如果对

$$M, M_1, M_2 \in \mathcal{B}, \Lambda, \Lambda_1, \Lambda_2 \in \mathcal{I}, (Y, Z) \in V, T \in E,$$

下列条件满足：

(i) $(q_1(M), q_2(M)), (f_1(\Lambda), f_2(\Lambda)), (g_1(\Gamma), g_2(\Gamma)) \in V^{\perp}$,

$(0, \Gamma Z), (0, \psi(\Lambda)Z), (\Lambda^* Y, 0)$,

$(M^* Y, \phi_2(M)Z), (\phi_1(M)^*, MZ) \in V$,

$T\phi_2(M), T\psi(\Lambda), T\Gamma, \phi_1(M)T, \Lambda T \in E$;

(ii) $\Gamma\psi(\Lambda), \psi(\Lambda)\Gamma, \Gamma\phi_2(M), \phi_2(M)\Gamma \in \mathcal{I}_2$,

并且

$(g_1(\Gamma_1\Gamma_2), g_2(\Gamma_1\Gamma_2) - \Gamma_2 g_2(\Gamma_1)) \in V$,

$(g_1(\psi(\Lambda)\Gamma) - \Lambda^* g_1(\Gamma), g_2(\psi(\Lambda)\Gamma) - \Gamma f_2(\Lambda)) \in V$,

$(g_1(\Gamma\psi(\Lambda)), g_2(\Gamma\psi(\Lambda)) - \psi(\Lambda) g_2(\Gamma)) \in V$,

$(g_1(\phi_2(M)\Gamma) - \phi_1(M)^* g_1(\Gamma), g_2(\phi_2(M)\Gamma) - M g_2(\Gamma) - \Gamma q_2(M)) \in V$,

$(g_1(\Gamma\phi_2(M)) - M^* g_1(\Gamma), g_2(\Gamma\phi_2(M)) - \phi_2(M) g_2(\Gamma)) \in V$;

(iii) $\phi_1(M)\Lambda, \Lambda\phi_1(M) \in \mathcal{I}_1$,

$\Gamma_1 = \psi(\phi_1(M)\Lambda) - \phi_2(M)\psi(\Lambda) \in \mathcal{I}_2$,

$\Gamma_2 = \psi(\Lambda\phi_1(M)) - \psi(\Lambda)\phi_2(M) \in \mathcal{I}_2$,

并且

$$(f_1(\phi_1(M)\Lambda) - g_1(\Gamma_1) - \phi_1(M)^* f_1(\Lambda),$$

$$f_2(\phi_1(M)\Lambda) - g_2(\Gamma_1) - M f_2(\Lambda) - \psi(\Lambda) q_2(M)) \in V,$$

$$(f_1(\Lambda\phi_1(M)) - g_1(\Gamma_2) - \Lambda^* g_1(M) - M^* f_1(\Lambda),$$

$$f_2(\Lambda\phi_1(M)) - g_2(\Gamma_2) - \phi_2(M) f_2(\Lambda)) \in V;$$

(iv) ϕ_1 是模 $\mathcal{I}_1$ 同态，ψ 是模 $\mathcal{I}_2$ 同态，

$$\tilde{\Gamma} = T_{\phi_2}(M_1, M_2) - \psi \circ T_{\phi_1}(M_1, M_2) \in \mathcal{I}_2,$$

$$Im(L_{\phi_2}-\psi\circ L_{\phi_1})\subseteq \mathcal{I}_2,$$

并且

$$(f_1(\Lambda_1\Lambda_2)-g_1\circ T_\psi(\Lambda_1,\Lambda_2)-\Lambda_1{}^* f_1(\Lambda_2),$$

$$f_2(\Lambda_1\Lambda_2)-g_2\circ T_\psi(\Lambda_1,\Lambda_2)-\psi(\Lambda_2)f_2(\Lambda_1))\in V,$$

$$(q_1(M_1M_2)-f_1(\widetilde{\Lambda})-g_1(\widetilde{\Gamma})-\phi_1(M_1)^* q_1(M_2)-M_2^* q_1(M_1),$$

$$q_2(M_1M_2)-f_2(\widetilde{\Lambda})-g_2(\widetilde{\Gamma})-M_1q_2(M_2)-\phi_2(M_2)q_2(M_1))\in V,$$

$$Im((g_1\circ L_\psi-L_{f_1})\oplus(g_2\circ L_\psi-L_{f_2}))\subseteq V,$$

$$Im((L_{q_1}-f_1\circ L_{\phi_1}-g_1(L_{\phi_2}-\psi\circ L_{\phi_1}))\oplus(L_{q_2}-f_2\circ L_{\phi_1}-g_2(L_{\phi_2}-\psi\circ L_{\phi_1})))\subseteq V,$$

这里 $\widetilde{\Lambda}=T_{\phi_1}(M_1,M_2)$；

(v) $\Gamma^*,\psi(\Lambda)^*,\phi_2(M)^*-\phi_1(M^*)\in\mathcal{I}_1$,

$\psi(\Gamma^*),\psi(\psi(\Lambda)^*)-\Lambda^*\in\mathcal{I}_2$,

$Im(\psi\circ S_{21}-S_{12})\subseteq\mathcal{M}_2$,

并且

$$f_1\circ S_{21}-Q_{21}=g_1\circ(\psi\circ S_{21}-S_{12}),$$

$$f_2\circ S_{21}-Q_{12}=g_2\circ(\psi\circ S_{21}-S_{12}),$$

$$f_1(\psi(\Lambda)^*)-f_2(\Lambda)=g_1(\psi(\psi(\Lambda)^*)-\Lambda^*),$$

$$f_2(\psi(\Lambda)^*)-f_1(\Lambda)=g_2(\psi(\psi(\Lambda)^*)-\Lambda^*),$$

$$f_1(\Gamma^*)-g_2(\Gamma)=g_1(\psi(\Gamma^*)),$$

$$f_2(\Gamma^*)-g_1(\Gamma)=g_2(\psi(\Gamma^*)).$$

定理 3.6　令 $\mathcal{A}$ 是 $\prod_k$ 空间上具有 $A(1,3)$ 性质的一般对称算子代数，则 $\mathcal{A}$ 是 Ⅲ_b 类的充分必要条件是存在一个 Ⅲ_b- 型

$$(\mathcal{B},\mathcal{I}_1,\mathcal{I}_2,E,V,\psi,f_1,f_2,\phi_1,\phi_2,q_1,q_2,g_1,g_2)$$

满足

$$\mathcal{A} = \left\{ \begin{pmatrix} \phi_1(M) + \Lambda & \widetilde{Y} \otimes \xi & T \\ & M & \eta \otimes \widetilde{Z} \\ & & \phi_2(M) + \psi(\Lambda) + \Gamma \end{pmatrix} \right\},$$

这里

$$\widetilde{Y} = q_1(M) + f_1(\Lambda) + g_1(\Gamma) + Y,$$

$$\widetilde{Z} = q_2(M) + f_2(\Lambda) + g_2(\Gamma) + Z,$$

$M \in B, \Lambda \in \mathcal{I}_1, \Gamma \in \mathcal{I}_2, T \in E, (Y, Z) \in V.$

证明 假设$\mathcal{A}$是 III_b 型的. 置

$$\mathcal{B} = \{M \mid \exists A \in \mathcal{A}, \phi_{22}(A) = M\},$$

$$\mathcal{I}_1 = \{\Lambda \mid \exists A \in \mathcal{M}_1, \phi_{11}(A) = \Lambda\},$$

$$\mathcal{I}_2 = \{\Gamma \mid \exists A \in \mathcal{N}_1 \cap \mathcal{M}_1, \phi_{33}(A) = \Gamma\},$$

$$E = \{T \mid \exists A \in \mathcal{A}, \phi_{13}(A) = T\},$$

$$V = \{Y \oplus Z \in \overline{H}^k \oplus H^k \mid F(Y \oplus Z) \in \mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_2\},$$

注意这些集合都是非空的.

对 $M \in \mathcal{B}$,设

$$A = \begin{pmatrix} \Lambda & Y_0 \otimes \xi & 0 \\ & M & \eta \otimes Z_0 \\ & & \Gamma \end{pmatrix} \in \mathcal{A},$$

因为$\mathcal{M}_1 \neq \{0\}$,我们可以选择另外一个固定的元

$$A' = \begin{pmatrix} \Lambda' & Y' \otimes \xi & 0 \\ & M & \eta \otimes Z' \\ & & \Gamma' \end{pmatrix} \in \mathcal{A},$$

则 $A - A' \in \mathcal{M}_1$.

假设

$$Y' \oplus Z' = (Y'_1 \oplus Z'_1) \oplus (Y'_2 \oplus Z'_2),$$

其中 $Y_1'\oplus Z_1'\in V^{\perp}$，$Y_2'\oplus Z_2'\in V$. 现在定义下列映射：

$$\phi_1:\mathcal{B}\longrightarrow B(Z),\phi_1(M)=\Lambda',$$

$$\phi_2:\mathcal{B}\longrightarrow B(Z^*),\phi_2(M)=\Gamma',$$

$$q_1:\mathcal{B}\longrightarrow \overline{H}^k,q_1(M)=Y_1,$$

$$q_2:\mathcal{B}\longrightarrow H^k,q_2(M)=Z_1,$$

则

$$A=\begin{pmatrix}\phi_1(M) & q_1(M)\otimes\xi & 0\\ & M & \eta\otimes q_2(M)\\ & & \phi_2(M)\end{pmatrix}+B,$$

这里 $B\in\mathcal{M}_1$.

由引理 3.3(4)，存在映射

$$\psi:\mathcal{I}_1\longrightarrow B(Z^*),$$

$$f_1:\mathcal{I}_1\longrightarrow \overline{H}^k,$$

$$f_2:\mathcal{I}_1\longrightarrow H^k$$

及两个线性映射

$$g_1:\mathcal{I}_2\longrightarrow \overline{H}^k,$$

与

$$g_2:\mathcal{I}_2\longrightarrow H^k,$$

满足

$$B=\begin{pmatrix}\Lambda & (f_1(\Lambda)+g_1(\Gamma)+Y)\otimes\xi & T\\ & 0 & \eta\otimes(f_2(\Lambda)+g_2(\Gamma)+Z)\\ & & \psi(\Lambda)+\Gamma\end{pmatrix},$$

其中 $Y\oplus Z\in V$，$T\in E$，$\Gamma\in\mathcal{I}_2$. 于是 $\mathcal{A}$ 有所描述的形式.

容易验证下列形式

$$(\mathcal{B},\mathcal{I}_1,\mathcal{I}_2,E,V,\psi,f_1,f_2,\phi_1,\phi_2,q_1,q_2,g_1,g_2)$$

是一个 III_b- 型的，因为$\mathcal{A}$是具有性质 $A(1,3)$ 的对称算子代数，并且

$$\mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & Y \otimes \xi & T \\ & 0 & \eta \otimes Z \\ & & 0 \end{pmatrix} \mid Y \oplus Z \in V, T \in E \right\},$$

$$\mathcal{N}_1 \cap \mathcal{M}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & (g_1(\Gamma) + Y) \otimes \xi & T \\ & 0 & \eta \otimes (g_2(\Gamma) + Z) \\ & & \Gamma \end{pmatrix} \mid Y \oplus Z \in V, T \in E, \Gamma \in \mathcal{I}_2 \right\},$$

并且

$$\mathcal{M}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} \Lambda & (f_1(\Lambda) + g_1(\Gamma) + Y) \otimes \xi & T \\ & 0 & \eta \otimes (f_2(\Lambda) + g_2(\Gamma) + Z) \\ & & \psi(\Lambda) + \Gamma \end{pmatrix} \right\},$$

这里 $\Lambda \in \mathcal{I}_1, Y \oplus Z \in V, T \in E, \Gamma \in \mathcal{I}_2$是理想.

充分性是显然的.

§3.5 各类算子代数闭性的等价条件

本节我们给出$\prod_k$ 空间上各类一般对称算子代数是闭的的等价条件.

引理 3.4 令 $X, Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$ 是 Banach* - 代数，$f_1, f_2, \cdots, f_n$ 分别是从 X 到 $Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$ 线性或共轭线性算子，则 $f_1, f_2, \cdots, f_n$ 是连续的，当且仅当对任意序列

$$\{x_i\} \subseteq X, x_i \longrightarrow x\,(i \longrightarrow \infty),$$

$$f_j(x_i) \longrightarrow y_j\,(i \longrightarrow \infty), j = 1, 2, \cdots, n,$$

有 $y_j = f_j(x), j = 1, 2, \cdots, n.$

证明 如果 $f_j : X \longrightarrow Y_j$ 是共轭线性的，$1 \leqslant j \leqslant n$，则$\tilde{f}_j : X \longrightarrow Y_j, \tilde{f}_j(x) = f_j(x)^*$ 是线性的. 并且$\tilde{f}_j$ 是连续的当且仅当 f_j 是连续的. 于是我们可以假设 $f_1, f_2, \cdots, f_n$ 是线性的.

定义

$$f: X \longrightarrow Y_1 \oplus Y_2 \oplus \cdots \oplus Y_n,$$

$$f(x) = (f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x)).$$

由闭图像定理有

$$f_1, f_2, \cdots, f_n \text{ 是连续的}$$

$$\Leftrightarrow f \text{ 是连续的}$$

$$\Leftrightarrow x_i \longrightarrow x, f(x_i) \longrightarrow y = (y_1, y_2, \cdots, y_n), j = 1,2,\cdots,n$$

蕴含 $y = f(x)$

$$\Leftrightarrow x_i \longrightarrow x, f_j(x_i) \longrightarrow y_j, j = 1,2,\cdots,n$$

蕴含 $y_j = f_j(x), j = 1,2,\cdots,n.$

下面的引理是常用的,略去其证明.

引理 3.5　令 H_1, H_2 是 Hilbert 空间,令 $h \in H_1, \xi \in H_2$,且满足 $\|\xi\| = 1$. 定义 1 秩算子

$$h \otimes \xi: H_1 \longrightarrow H_2,$$

$$h \otimes \xi(\eta) = (\eta, h)\xi.$$

则 $\|h \otimes \xi\| = \|h\|$. 因此 $h_i \otimes \xi \longrightarrow h \otimes \xi$,当且仅当 $h_i \longrightarrow h$.

定理 3.7　令 $\mathcal{B}$ 是 $B(H)$ 的一个 C^*-子代数. $\prod_k$ 空间上第 0 类一般对称算子代数 $\mathcal{A}$ 其型为 $(\mathcal{B}, \phi, q, \theta)$,则它是闭的充分必要条件是 ϕ, q 和 θ 都是连续的.

证明　假设 $\mathcal{A}$ 是闭的. 令 $\{M_i\} \subseteq \mathcal{B}$,且满足

$$M_i \longrightarrow M,$$

$$\phi(M_i) \longrightarrow \Lambda,$$

$$\phi(M_i^*)^* \longrightarrow \Lambda',$$

$$q(M_i) \longrightarrow Y,$$

$$q(M_i^*) \longrightarrow Y',$$

$$\theta(M_i) \longrightarrow T.$$

因为$\mathcal{B}$是闭的，所以 $M \in \mathcal{B}$. 置

$$A_i = \begin{pmatrix} \phi(M_i) & q(M_i) \otimes \xi & \theta(M_i) \\ & M_i & \eta \otimes q(M_i^*) \\ & & \phi(M_i^*)^* \end{pmatrix},$$

$$A = \begin{pmatrix} \Lambda & Y \otimes \xi & T \\ & M & \eta \otimes Y' \\ & & \Lambda' \end{pmatrix},$$

则 $A_i \longrightarrow A$. 由 A 是闭的，且 $A_i \in \mathcal{A}$，有 $A \in \mathcal{A}$. 所以

$$\Lambda = \phi(M),$$

$$\Lambda' = \phi(M^*)^*,$$

$$Y = q(M),$$

$$Y' = q(M^*),$$

$$\theta(M) = T.$$

由引理 3.4，ϕ，q 和 θ 都是连续的.

反之，假设 ϕ，q 和 θ 都是连续的. 令

$$A_i = \begin{pmatrix} \phi(M_i) & q(M_i) \otimes \xi & \theta(M_i) \\ & M_i & \eta \otimes q(M_i^*) \\ & & \phi(M_i^*)^* \end{pmatrix} \in \mathcal{A},$$

并且

$$A_i \longrightarrow A = \begin{pmatrix} \Lambda & Y \otimes \xi & T \\ & M & \eta \otimes Y' \\ & & \Lambda' \end{pmatrix},$$

则

$$M_i \longrightarrow M, \phi(M_i) \longrightarrow \Lambda,$$

$$q(M_i) \longrightarrow Y, q(M_i^*) \longrightarrow Y',$$

$$\phi(M_i^*)^* \longrightarrow \Lambda', \theta(M_i) \longrightarrow T.$$

因为$\mathcal{B}$是闭的,有 $M \in \mathcal{B}$. 因为 ϕ, q 和 θ 都是连续的,有

$$\phi(M) = \Lambda, \phi(M^*)^* = \Lambda',$$

$$q(M) = Y, q(M^*) = Y',$$

并且 $\theta(M) = T$. 于是

$$A = \begin{pmatrix} \phi(M) & q(M) \otimes \xi & T \\ & M & \eta \otimes q(M^*) \\ & & \phi(M^*)^* \end{pmatrix} \in \mathcal{A},$$

所以$\mathcal{A}$是闭的.

定理 3.8　令$\mathcal{B}$是 $B(H)$ 的一个 C^* - 子代数. $\prod_k$ 空间上具有 $A(1,3)$ 性质的第 Ⅰ 类一般对称算子代数$\mathcal{A}$其型为$(\mathcal{B}, E, V, \phi, q)$ 是闭的,当且仅当 E 和 V 是闭的,ϕ 和 q 连续的.

证明　假设$\mathcal{A}$是闭的. 由类似于定理 3.7 的证明,知道 ϕ 与 q 是连续的. 因$\mathcal{A}$有 $A(1,3)$ 性质,所以 E 是闭的. 对于 V,令

$$(Y_i, Z_i) \in V, (Y_i, Z_i) \longrightarrow (Y, Z),$$

则

$$A_i = \begin{pmatrix} 0 & Y_i \otimes \xi & 0 \\ & 0 & \eta \otimes Z_i \\ & & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & Y \otimes \xi & 0 \\ & 0 & \eta \otimes Z \\ & & 0 \end{pmatrix},$$

因为 $A_i \in \mathcal{A}$, $A \in \mathcal{A}$. 所以 $(Y, Z) \in V$.

反之,令

$$A_i = \begin{pmatrix} \phi(M_i) & (q(M_i) + Y_i) \otimes \xi & 0 \\ & M_i & \eta \otimes (q(M_i^*) + Z_i) \\ & & \phi(M_i^*)^* \end{pmatrix} \in \mathcal{A},$$

并且

$$A_i \longrightarrow A = \begin{pmatrix} \Lambda & Y \otimes \xi & 0 \\ & M & \eta \otimes Z \\ & & \Lambda' \end{pmatrix}.$$

因为$\mathcal{B}$是闭的，有 $M = \lim M_i \in V$. 又因 ϕ 与 q 是连续的，有

$$\Lambda = \lim \phi(M_i) = \phi(M),$$

$$\Lambda' = \lim \phi(M_i^*)^* = \phi(M^*)^*,$$

$$q(M) = \lim q(M_i),$$

$$q(M^*) = \lim q(M_i^*).$$

因此，

$$Y' = Y - q(M) = \lim Y_i,$$

$$Z' = Z - q(M^*) = \lim Z_i.$$

因 V 是闭的，有$(Y', Z') \in V$. 由$\mathcal{A}$具有 $A(1,3)$ 性质知$\mathcal{A}$是闭的，所以 $A \in \mathcal{A}$.

定义 3.12 令$\mathcal{B}$是 $B(H)$ 的一个 C^* - 子代数. 一个 II_a- 型($\mathcal{B}, \mathcal{I}, \psi, \phi_1, \phi_2$) 称为是闭的，如果对任意$\{M_i\} \subseteq B$, $\{\Lambda_i\} \subseteq \mathcal{I}$，满足下列条件：

$$M_i \longrightarrow M, \phi_1(M_i) + \Lambda_i \longrightarrow \Lambda,$$

$$\phi_2(M_i) + \psi(\Lambda_i) \longrightarrow \Gamma,$$

则有

$$\psi(\Lambda - \phi_1(M)) = \Gamma - \phi_2(M).$$

定理 3.9 令$\mathcal{B}$是 $B(H)$ 的一个 C^* - 子代数. $\prod_k$ 空间上具有性质 $A(1,3)$ 的 II_a 类一般对称算子代数$\mathcal{A}$其型为($\mathcal{B}, \mathcal{I}, \psi, \phi_1, \phi_2$)，则$\mathcal{A}$是闭的充分必要条件是($\mathcal{B}, \mathcal{I}, \psi, \phi_1, \phi_2$) 为闭的.

证明 必要性是显然的，来证充分性. 令

$$A_i = \begin{pmatrix} \phi_1(M_i) + \Lambda_i & & \\ & M_i & \\ & & \phi_2(M_i) + \psi(\Lambda_i) \end{pmatrix} \in \mathcal{A},$$

满足

$$A_i \longrightarrow A = \begin{pmatrix} \Lambda & & \\ & M & \\ & & \Gamma \end{pmatrix}.$$

因为$\mathcal{B}$是闭的，有

$$M = \lim M_i \in \mathcal{B}.$$

令 $\Lambda' = \Lambda - \phi_1(M)$. 因为$(\mathcal{B}, \mathcal{I}, \psi, \phi_1, \phi_2)$是闭的，有

$$A = \begin{bmatrix} \phi_1(M) + \Lambda' & & \\ & M & \\ & & \phi_2(M) + \psi(\Lambda') \end{bmatrix} \in \mathcal{A},$$

所以$\mathcal{A}$是闭的.

定义 3.13　令$\mathcal{B}$是$B(H)$的一个C^*-子代数. 一个 II_b-型$(\mathcal{B}, \mathcal{I}, E, V, \psi, f_1, f_2, \phi_1, \phi_2, q_1, q_2)$称为是闭的，如果对任意

$$\{M_i\} \subseteq B, \{\Lambda_i\} \subseteq \mathcal{I}, (Y_i, Z_i) \in V,$$

满足

$$M_i \longrightarrow M,$$

$$\phi_1(M_i) + \Lambda_i \longrightarrow \Lambda,$$

$$\phi_2(M_i) + \psi(\Lambda_i) \longrightarrow \Gamma,$$

$$q_1(M_i) + f_1(\Lambda_i) + Y_i \longrightarrow Y,$$

$$q_2(M_i) + f_2(\Lambda_i) + Z_i \longrightarrow Z,$$

则有

$$\Lambda - \phi_1(M) \in \mathcal{I},$$

$$(Y - q_1(M) - f_1(\Lambda - \phi_1(M)),$$

$$Z - q_2(M) - f_2(\Lambda - \phi_1(M))) \in V,$$

$$\psi(\Lambda - \phi_1(M)) = \Gamma - \phi_2(M).$$

定理 3.10　令$\mathcal{B}$是$B(H)$的一个C^*-子代数. $\prod_k$ 空间上具有性质$A(1,3)$的 II_b 类的一般对称算子代数$\mathcal{A}$，其型为$(\mathcal{B}, \mathcal{I}, E, V, \psi, f_1, f_2, \phi_1, \phi_2, q_1, q_2)$，则$\mathcal{A}$是闭的的充分必要条件是$(\mathcal{B}, \mathcal{I}, E, V, \psi, f_1, f_2, \phi_1, \phi_2, q_1, q_2)$为闭的.

证明　必要性是显然的，只证充分性. 令

$$A_i = \begin{pmatrix} \phi_1(M_i) + A_i & (q_1(M_i) + f_1(\Lambda_i) + Y_i) \otimes \xi & 0 \\ & M_i & \eta \otimes (q_2(M_i) + f_2(\Lambda_i) + Z_i) \\ & & \phi_2(M_i) + \psi(\Lambda_i) \end{pmatrix} \in A,$$

并且

$$A_i \longrightarrow A = \begin{pmatrix} \Lambda & Y \otimes \xi & 0 \\ & M & \eta \otimes Z \\ & & \Gamma \end{pmatrix}$$

因为$\mathcal{B}$是闭的，有 $M = \lim M_i \in \mathcal{B}$. 又因($\mathcal{B}, \mathcal{I}, E, V, \psi, f_1, f_2, \phi_1, \phi_2, q_1, q_2$) 是闭的，有

$$\Lambda' = \Lambda - \phi_1(M) \in \mathcal{I}$$

和$(Y', Z') \in V$，并且

$$Y' = Y - q_1(M) - f_1(\Lambda - \phi_1(M)),$$

$$Z' = Z - q_2(M) - f_2(\Lambda - \phi_1(M)),$$

因此，

$$A = \begin{pmatrix} \phi_1(M) + \Lambda' & (q_1(M) + f_1(\Lambda - \phi_1(M)) + Y') \otimes \xi & 0 \\ & M & \eta \otimes (q_2(M) + f_2(\Lambda) + Z') \\ & & \phi_2(M) + \psi(\Lambda') \end{pmatrix} \in \mathcal{A},$$

所以$\mathcal{A}$是闭的.

定义 1.14 令$\mathcal{B}$是 $B(H)$ 的一个 C^* - 子代数. 一个 III_a- 型($\mathcal{B}, \mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2, \psi, \phi_1, \phi_2$) 称为是闭的，如果对任意

$$\{M_i\} \subseteq \mathcal{B}, \{\Lambda_i\} \subseteq \mathcal{I}_1, \Gamma_i \in \mathcal{I}_2,$$

满足

$$M_i \longrightarrow M, \phi_1(M_i) + \Lambda_i \longrightarrow \Lambda,$$

$$\phi_2(M_i) + \psi(\Lambda_i) + \Gamma_i \longrightarrow \Gamma.$$

则有

$$\Lambda - \phi_1(M) \in \mathcal{I}_1$$

和

$$\Gamma-\psi(\Lambda-\phi_1(M))-\phi_2(M)\in\mathcal{I}_2.$$

定理 3.11　令$\mathcal{B}$是$B(H)$的一个C^*-子代数. $\prod_k$空间上的具有性质$A(1,3)$的III_a类一般对称算子代数$\mathcal{A}$,其型为$(\mathcal{B},\mathcal{I}_1,\mathcal{I}_2,\psi,\phi_1,\phi_2)$,则$\mathcal{A}$是闭的的充分必要条件是$(\mathcal{B},\mathcal{I}_1,\mathcal{I}_2,\psi,\phi_1,\phi_2)$为闭的.

证明　必要性是显然的. 来证充分性. 令

$$A_i=\begin{pmatrix}\phi_1(M_i)+\Lambda_i & & \\ & M_i & \\ & & \phi_2(M_i)+\psi(\Lambda_i)+\Gamma_i\end{pmatrix}\in\mathcal{A},$$

满足

$$A_i\longrightarrow A=\begin{pmatrix}\Lambda & & \\ & M & \\ & & \Gamma\end{pmatrix}.$$

因$\mathcal{B}$是闭的,有$M=\lim M_i\in\mathcal{B}$. 又因$(\mathcal{B},\mathcal{I}_1,\mathcal{I}_2,\psi,\phi_1,\phi_2)$是闭的,有

$$\Lambda'=\Lambda-\phi_1(M)\in\mathcal{I}_1,$$

$$\Gamma'=\Gamma-\psi(\Lambda-\phi_1(M))-\phi_2(M)\in\mathcal{I}_2.$$

因此,

$$A=\begin{pmatrix}\phi_1(M)+\Lambda' & & \\ & M & \\ & & \phi_2(M)+\psi(\Lambda')+\Gamma'\end{pmatrix}\in\mathcal{A}.$$

所以$\mathcal{A}$是闭的.

定义 3.15　令$\mathcal{B}$是$B(H)$的一个C^*-子代数. 一个III_b-型$(\mathcal{B},\mathcal{I}_1,\mathcal{I}_2,E,V,\psi,f_1,f_2,\phi_1,\phi_2,q_1,q_2,g_1,g_2)$称为是闭的,如果对任意

$$\{M_i\}\subseteq\mathcal{B},\{\Lambda_i\}\subseteq\mathcal{I}_1,\Gamma_i\in\mathcal{I}_2$$

及

$$(Y_i,Z_i)\in V,$$

满足

$$M_i \longrightarrow M, \phi_1(M_i) + \Lambda_i \longrightarrow \Lambda,$$

$$\phi_2(M_i) + \psi(\Lambda_i) + \Gamma_i \longrightarrow \Gamma,$$

$$q_1(M_i) + f_1(\Lambda_i) + g_1(\Gamma_i) + Y_i \longrightarrow Y,$$

并且

$$q_2(M_i) + f_2(\Lambda_i) + g_2(\Gamma_i) + Z_i \longrightarrow Z,$$

则有

$$\Lambda - \phi_1(M) \in \mathcal{I}_1,$$

$$\Gamma - \psi(\Lambda - \phi_1(M)) - \phi_2(M) \in \mathcal{I}_2,$$

$$(Y - q_1(M) + f_1(\Lambda - \phi_1(M)) + g_1(\Gamma - \psi(\Lambda - \phi_1(M)) - \phi_2(M)),$$

$$Z - q_2(M) + f_2(\Lambda - \phi_1(M)) + g_2(\Gamma - \psi(\Lambda - \phi_1(M)) - \phi_2(M))) \in V.$$

定理 3.12 令$\mathcal{B}$是$B(H)$的一个C^*-子代数. $\prod_k$空间上具有性质$A(1,3)$的Ⅲ$_b$类一般对称算子代数$\mathcal{A}$,其型为$(\mathcal{B}, \mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2, E, V, \psi, f_1, f_2, \phi_1, \phi_2, q_1, q_2, g_1, g_2)$,则$\mathcal{A}$是闭的的充分必要条件是$(\mathcal{B}, \mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2, E, V, \psi, f_1, f_2, \phi_1, \phi_2, q_1, q_2, g_1, g_2)$为闭的.

证明 必要性是显然的,这里只证充分性. 令

$$A_i = \begin{pmatrix} \phi_1(M_i) + \Lambda_i & \widetilde{Y_i} \otimes \xi & 0 \\ & M_i & \eta \otimes \widetilde{Z_i} \\ & & \phi_2(M_i) + \psi(\Lambda_i) + \Gamma_i \end{pmatrix} \in \mathcal{A},$$

这里

$$\widetilde{Y_i} = q_1(M_i) + f_1(\Lambda_i) + g_1(\Gamma_i) + Y_i,$$

$$\widetilde{Z_i} = q_2(M_i) + f_2(\Lambda_i) + g_2(\Gamma_i) + Z_i,$$

并且

$$A_i \longrightarrow A = \begin{pmatrix} \Lambda & Y \otimes \xi & 0 \\ & M & \eta \otimes Z \\ & & \Gamma \end{pmatrix}.$$

因为$\mathcal{B}$是闭的，有$M=\lim M_i \in \mathcal{B}$. 又因($\mathcal{B}$, $\mathcal{I}_1$, $\mathcal{I}_2$, E, V, ψ, f_1, f_2, ϕ_1, ϕ_2, q_1, q_2, g_1, g_2)是闭的，
有

$$\Lambda' = \Lambda - \phi_1(M) \in \mathcal{I}_1,$$

及

$$\Gamma' = \Gamma - \psi(\Lambda - \phi_1(M)) - \phi_2(M) \in \mathcal{I}_2;$$

并且

$$(Y', Z') \in V,$$

$$Y' = Y - q_1(M) - f_1(\Lambda - \phi_1(M)) - g_1(\Gamma - \psi(\Lambda - \phi_1(M)) - \phi_2(M)),$$

$$Z' = Z - q_2(M) - f_2(\Lambda - \phi_1(M)) - g_2(\Gamma - \psi(\Lambda - \phi_1(M)) - \phi_2(M)),$$

因此，

$$A = \begin{pmatrix} \phi_1(M) + \Lambda' & (\widetilde{Y} + Y') \otimes \xi & 0 \\ & M & \eta \otimes (\widetilde{Z} + Z') \\ & & \phi_2(M) + \psi(\Lambda') + \Gamma' \end{pmatrix} \in \mathcal{A},$$

这里

$$\widetilde{Y} = q_1(M) + f_1(\Lambda') + g_1(\Gamma'),$$

$$\widetilde{Z} = q_2(M) + f_2(\Lambda') + g_2(\Gamma').$$

所以$\mathcal{A}$是闭的.

§ 3.6 一些子代数的情况

本节首先给出六类具体的一般对称算子代数，然后给出一个不是对角型的第0类一般对称算子代数.

例 3.1 令ϕ_0是从$\mathcal{B}$到$B(Z)$的可乘线性映射. 则0-型($\mathcal{B}$, ϕ_0, 0, 0)对应下列算子代

数：

$$\mathcal{A}=\left\{\begin{pmatrix}\phi_0(M) & & \\ & M & \\ & & \phi_0(M^*)^*\end{pmatrix}\middle| M\in\mathcal{B}\right\}.$$

例 3.2 令 ϕ_0 是从 $\mathcal{B}$ 到 $B(Z)$ 的可乘线性映射. 则 I- 型($\mathcal{B},E,V,\phi_0,q$) 对应下列算子代数：

$$\mathcal{A}=\left\{\begin{pmatrix}\phi_0(M) & (q(M)+Y)\otimes\xi & T \\ & M & \eta\otimes(q(M^*)+Z) \\ & & \phi_0(M^*)^*\end{pmatrix}\middle| M\in\mathcal{B},T\in E,(Y,Z)\in V\right\}.$$

例 3.3 II_a- 型($\mathcal{B},\mathcal{I},\psi,0,0$) 对应下列算子代数：

$$\mathcal{A}=\left\{\begin{pmatrix}\Lambda & & \\ & M & \\ & & \psi(\Lambda)\end{pmatrix}\middle| M\in\mathcal{B},\Lambda\in\mathcal{I}\right\}.$$

例 3.4 II_b- 型($\mathcal{B},\mathcal{I},E,V,I,0,0,0,0,0,0,0$) 对应下列算子代数：

$$\mathcal{A}=\left\{\begin{pmatrix}\Lambda & Y\otimes\xi & T \\ & M & \eta\otimes Z \\ & & \Lambda\end{pmatrix}\right\},$$

这里 $M\in\mathcal{B},\Lambda\in\mathcal{I},T\in E,(Y,Z)\in V$.

例 3.5 III_a- 型($\mathcal{B},\mathcal{I}_1,\mathcal{I}_2,0,0,0$) 对应下列算子代数：

$$\mathcal{A}=\left\{\begin{pmatrix}\Lambda & & \\ & M & \\ & & \Gamma\end{pmatrix}\middle| M\in\mathcal{B},\Lambda\in\mathcal{I}_1,\Gamma\in\mathcal{I}_2\right\}.$$

例 3.6 III_b- 型($\mathcal{B},\mathcal{I}_1,\mathcal{I}_2,E,V,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0$) 对应下列算子代数：

$$\mathcal{A}=\left\{\begin{pmatrix}\Lambda & Y\otimes\xi & T \\ & M & \eta\otimes Z \\ & & \Gamma\end{pmatrix}\right\},$$

这里 $M\in\mathcal{B},\Lambda\in\mathcal{I}_1,\Gamma\in\mathcal{I}_2,T\in E,(Y,Z)\in V$.

例 3.7　存在一个第 0 类的算子代数,它不是对角的算子代数,例如,

$$\mathcal{A}_0=\left\{\begin{pmatrix} \alpha & (0,\bar{\lambda},\bar{\mu})^T\otimes e & \lambda+\mu \\ & \begin{pmatrix} \alpha & & \\ & \lambda+\alpha & \\ & & \mu+\alpha \end{pmatrix} & e^*\otimes(0,\lambda,\mu)^T \\ & & \alpha \end{pmatrix}:\alpha,\lambda,\mu\in\mathbf{C}\right\}$$

是 $\prod_1$ 空间上的第 0 类算子代数,这里

$$\prod\nolimits_1=(Z\oplus H)+Z^*,$$

H 是一个 Hilbert 空间,并且

$$\dim H=3,$$

$$Z=span\{e\},Z^*=span\{e^*\},$$

$$(e,e)=1=[e,e^*],[e,e]=[e^*,e^*]=0.$$

显然 $\mathcal{A}_0$ 不是对角的.

证明　容易看出 $\mathcal{A}_0$ 在线性运算和共轭运算"#"下是封闭的.令 $A_1,A_2\in\mathcal{A}_0$,并且

$$A_1=\begin{pmatrix} \alpha_1 & (0,\overline{\lambda_1},\overline{\mu_1})^T\otimes e & \lambda_1+\mu_1 \\ & \begin{pmatrix} \alpha_1 & & \\ & \lambda_1+\alpha_1 & \\ & & \mu_1+\alpha_1 \end{pmatrix} & e^*\otimes(0,\lambda_1,\mu_1)^T \\ & & \alpha_1 \end{pmatrix},$$

$$A_2=\begin{pmatrix}\alpha_2 & (0,\overline{\lambda_2},\overline{\mu_2})^T\otimes e & \lambda_2+\mu_2\\ & \begin{pmatrix}\alpha_2 & & \\ & \lambda_2+\alpha_2 & \\ & & \mu_2+\alpha_2\end{pmatrix} & e^*\otimes(0,\lambda_2,\mu_2)^T\\ & & \alpha_2\end{pmatrix},$$

则

$$A_1A_2=\begin{pmatrix}\alpha_1\alpha_2 & (0,\overline{\alpha_1\lambda_2+\alpha_2\lambda_1+\lambda_1\lambda_2},\overline{\alpha_1\mu_2+\alpha_2\mu_1+\mu_1\mu_2})^T\otimes e & \gamma\\ & \alpha_1\alpha_2 I_H+\begin{pmatrix}0 & & \\ & \alpha_1\lambda_2+\alpha_2\lambda_1+\lambda_1\lambda_2 & \\ & & \alpha_1\mu_2+\alpha_2\mu_1+\mu_1\mu_2\end{pmatrix} & e^*\otimes\delta\\ & & \alpha_1\alpha_2\end{pmatrix},$$

这里

$$\gamma=\alpha_1\mu_2+\alpha_2\mu_1+\alpha_1\lambda_2+\alpha_1\lambda_2+\lambda_1\lambda_2+\mu_1\mu_2,$$

$$\delta=(0,\alpha_1\lambda_2+\alpha_2\lambda_1+\lambda_1\lambda_2,\alpha_1\mu_2+\alpha_2\mu_1+\mu_1\mu_2)^T.$$

因此$\mathcal{A}_0$是一个算子代数. 显然 A_0 是 0 型的.

此例的详细论证将在第四章进一步叙述.

第四章

算子代数的其他形式及弱闭、一致闭等价条件

本章给出$\amalg_k$空间上第一类算子代数的另一种形式，并给出Shulman意义下一组算子代数是弱闭和一致闭的等价条件.

§4.1 引言

Shulman 在 1971 年给出$\prod_1$空间上第一类算子代数在正规分解

$$\prod_1 = (Z \oplus H) + Z^*$$

下的形式为

$$\mathcal{A}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda & A_{12}^1 & t \\ & \lambda I + M & A_{23}^1 \\ & & \lambda \end{pmatrix} \mid M \in \mathcal{B}_1, U \in D_1 \right\},$$

这里

$$A_{12}^1 = (q(M^*) \oplus Y \oplus PU) \otimes \xi,$$

$$A_{23}^1 = \eta \otimes (q(M) \oplus W \oplus U),$$

$Y, W \in R \subseteq H, \lambda, t \in \mathbf{C}$，$\mathcal{B}_1$是没有单位的 C^*-代数，R 是对$\mathcal{B}_1$不变的子空间，$D_1 \subseteq ker\ \mathcal{B}_1$，$q: \mathcal{B}_1 \longrightarrow H$ 是拟向量.

在 §2.1 中介绍了$\prod_k$空间上有单位的第一类闭算子代数. 这是 Shulman 意义下第一类算子代数.

$$\mathcal{A}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda I_Z & A_{12}^2 & T \\ & \lambda I_H + M & A_{23}^2 \\ & & \lambda I_{Z^*} \end{pmatrix} \mid M \in \mathcal{B}_2 \right\}$$

这里

$$A_{12}^2 = (q(M^*) \oplus Y \oplus PU) \otimes \xi,$$

$$A_{23}^2 = \eta \otimes (q(M) \oplus W \oplus U),$$

$Y, W \in R, U \in D, T \in T, \lambda \in \mathbf{C}$，$\mathcal{B}_2$是 C^*-代数，并且单位算子 $I_H \notin \mathcal{B}_2$，$R \subseteq H^k$ 是对$\mathcal{B}_2$不变的子空间，$D \subseteq H^k$，$D \subseteq ker\ \mathcal{B}_2$，$q: \mathcal{B}_2 \longrightarrow H^k$ 是拟向量.

§4.2 一类特殊映射的构造

本节是为了给出$\prod_k$空间上第一类算子代数的另一种形式而做的准备工作. 主要是构造一个特殊的映射.

在$\prod_k$空间的正规分解

$$\prod_k = (Z \oplus H) + Z^*$$

中,H是$\prod_k$型空间,Z,Z^*是$\prod_k$空间的零性子空间,并且构成对偶,即Z与Z^*中分别存在基向量组x_i,和y_j,使得$[x_i,y_j]=\delta_{ij},i,j=1,\cdots,k$."$\oplus$"是按$[\cdot,\cdot]$的直交和,"+"是线性和. 并且$Z,Z^*$与$H$三部分按$(\cdot,\cdot)$是相互直交的. 如果$Z$的维数等于$k$,则$H$是Hilbert空间.

设$\mathcal{A}$是$\prod_k$空间上一般的对称算子代数,则$\mathcal{A}$有零性不变子空间. 令Z是$\mathcal{A}$的维数最大的零性不变子空间,并且$\dim Z = k$.

设Z^*为Z的对偶,记

$$H = (Z + Z^*)^{[\perp]},$$

则H是一个Hilbert空间,于是得到空间$\prod_k$的正规分解

$$\prod_k = (Z \oplus H) + Z^*.$$

由$\mathcal{A}$的对称性知Z关于不定内积的直交补$Z^{[\perp]}$也是$\mathcal{A}$的不变子空间. 即$Z \oplus H$也是$\mathcal{A}$的不变子空间.

令$\{e_1,e_2,\cdots,e_k\}$是Z的标准正交基,$\{e_1^*,e_2^*,\cdots,e_k^*\}$是$Z^*$的标准正交基,且与$\{e_1,e_2,\cdots,e_k\}$成偶对,即

$$[e_i,e_j] = \delta_{ij},(i,j=1,\cdots,k).$$

取算子

$$J_1 \in B(Z^*,Z), J_3 \in B(Z,Z^*),$$

满足下列条件:

$$J_1 e_i^* = e_i, J_3 e_i = e_i^*, i = 1,2,\cdots,k.$$

则得相应于正规分解的度规算子为：

$$J=\begin{pmatrix} & & J_1 \\ & I & \\ J_3 & . & \end{pmatrix},$$

其中 I 为 H 上的单位算子.

$$J_1^* = J_3, J_1J_3 = I_Z, J_3J_1 = I_{Z^*}.$$

因为 $Z, Z\oplus H$ 都是 $\mathcal{A}$ 的不变子空间，所以对任意的算子 $X\in\mathcal{A}$ 有下述分解：

$$X=\begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} & X_{13} \\ & X_{22} & X_{23} \\ & & X_{33} \end{pmatrix},$$

其中 X_{11}, X_{33} 及 X_{13} 都是 $k\times k$ 矩阵. 在 J_1 和 J_3 的作用下，Z 与 Z^* 是同构的，并且 $B(Z)$ 与 $B(Z^*)$ 中的算子不加区别. 此时

$$X^\# = JX^*J=\begin{pmatrix} X_{33}^* & X_{23}^* & X_{13}^* \\ & X_{22}^* & X_{12}^* \\ & & X_{11}^* \end{pmatrix}$$

对算子代数 $\mathcal{A}$，令

$$\mathcal{M}_1=\{X \mid X\in\mathcal{A}, X_{22}=0\},$$

$$\mathcal{M}_2=\{X \mid X\in\mathcal{A}, X_{11}=X_{33}=0\}.$$

设 $\mathcal{A}$ 是 $\prod_k$ 空间上一般的对称算子代数. 若 $\mathcal{M}_1\neq\{0\}$，且 $\mathcal{M}_1\subseteq\mathcal{M}_2$，则 $\mathcal{A}$ 是第Ⅰ类的. 记

$$\mathcal{A}_{13}=\left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 & X_{13} \\ & 0 & 0 \\ & & 0 \end{pmatrix} \,\middle|\, X\in\mathcal{A}, X=\begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} & X_{13} \\ & X_{22} & X_{23} \\ & & X_{33} \end{pmatrix}\right\},$$

则 $\mathcal{A}_{13}$ 是对称子空间，即平凡的对称代数.

注：① 一个一般对称算子代数加上条件 $A(1,3)$ 后与原代数最多相差一个有限维代数.

② $\mathcal{A}\mathcal{A}_{13}=\mathcal{A}_{13}\mathcal{A}$.

引理 4.1　设$\mathcal{A}$是第一类闭算子代数，则$\mathcal{B}=\mathcal{A}_{|H}$是 C^*-代数.

证明　因 $\dim Z=\dim Z^*=k$，且$\mathcal{A}$是闭算子代数，所以$\mathcal{A}_{|H}$是闭的. 又由$\mathcal{A}$对"#"运算封闭，所以$\mathcal{A}_{|H}$对"*"运算封闭. 于是$\mathcal{A}_{|H}$是 H 上的 C^*-代数.

引理 4.2　设$\mathcal{A}$是第一类闭算子代数，则存在同态 $\phi:\mathcal{B}\longrightarrow B(Z)$，$\mathcal{B}=\mathcal{A}_{|H}$和映射 $\psi:\mathcal{B}/ker\phi\longrightarrow\mathcal{B}$，$\psi(\widetilde{M})=M$（只取一个代表元素），使得$\mathcal{A}$中元素具有下述形式

$$\begin{pmatrix}\phi(M) & * & * \\ & M+M_0 & * \\ & & \phi(M^*)^*\end{pmatrix},$$

$$M_0\in ker\phi, M=\psi(\widetilde{M})\in\widetilde{M}\in\mathcal{B}/ker\phi,$$

其中 $\phi(M)=0$，当且仅当 $M=0$.

证明　令$\mathcal{A}$是第 Ⅰ 类的，$A_1,A_2\in\mathcal{A}$并且

$$A_1=\begin{pmatrix}A_{11} & * & * \\ & A_{22} & * \\ & & A_{33}\end{pmatrix},$$

$$A_2=\begin{pmatrix}A'_{11} & * & * \\ & A_{22} & * \\ & & A'_{33}\end{pmatrix},$$

则

$$A_1-A_2=\begin{pmatrix}A_{11}-A'_{11} & * & * \\ & 0 & * \\ & & A_{33}-A'_{33}\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_1,$$

由$\mathcal{M}_1\subseteq\mathcal{M}_2$，有 $A_{11}=A'_{11}$，$A_{33}=A'_{33}$. 因此存在

$$\phi:\mathcal{B}\longrightarrow B(Z),\phi(A_{22})=A_{11},$$

$$\phi':\mathcal{B}\longrightarrow B(Z^*),\phi'(A_{22})=A_{33},$$

因

$$A^{\#}=\begin{pmatrix}A_{33}^{*} & * & * \\ & A_{22}^{*} & * \\ & & A_{11}^{*}\end{pmatrix},$$

所以 $\phi'(A_{22}^{*})=\phi(A_{22})^{*}$，且 $\phi'(A_{22})=\phi(A_{22}^{*})^{*}$. 易见 ϕ 是代数同态. 不难看出 $ker\phi=\mathcal{M}_{2|H}$，并且 $ker\phi\subseteq\mathcal{B}$ 是一个理想. 所以我们可以定义在类 $\widetilde{M}$ 中只取一个代表元的映射如下：

$$\psi:\mathcal{B}/ker\phi\longrightarrow\mathcal{B},\psi(\widetilde{M})=M,$$

且 $\psi(\widetilde{0})=0$. 并且有

$$\psi(\alpha\widetilde{M})-\alpha\psi(\widetilde{M})\in ker\phi,\alpha\in\mathbf{C},$$

$$\psi(\widetilde{M}_1+\widetilde{M}_2)-\psi(\widetilde{M}_1)-\psi(\widetilde{M}_2)\in ker\phi,$$

$$\psi(\widetilde{M_1M_2})-\psi(\widetilde{M_1})\psi(\widetilde{M_2})\in ker\phi.$$

因 $\mathcal{A}$ 是闭的，由 $\mathcal{M}_2$ 是闭的，从而 $ker\phi$ 是闭的. 令

$$X=M_1+M_0=M_2+M_0,M_0,M_0\in ker\phi,$$

$X,M_1,M_2\in\mathcal{A}$，则 $M_1-M_2\in ker\phi$. 因此 $\psi(\widetilde{M_1})=\psi(\widetilde{M}_2)$. 于是 $\mathcal{B}$ 中的元有下述形式：

$$X=M+M_0,M_0\in ker\phi,$$

$$M=\psi(\widetilde{M})\in\widetilde{M}\in\mathcal{B}/ker\phi.$$

即 A 中的元有下述形式：

$$\begin{pmatrix}\phi(M) & * & * \\ & M+M_0 & * \\ & & \phi(M^{*})^{*}\end{pmatrix},M_0\in ker\phi,M=\psi(\widetilde{M}).$$

这里，当 $M=0$ 时，$\phi(M)=0$. 反之，当 $\phi(M)=0$ 时，由 ψ 的定义知 $M=0$.

令 H 是一个 Hilbert 空间，H 按下列内积和线性运算：

$$ax=\bar{a}x,a\in\mathbf{C},x\in H$$

和

$$(x,y)^{-}=\overline{(x,y)}$$

构成一个 Hilbert 空间 $\overline{H}$.

令

$$H^k = H \times H \times \cdots \times H,$$

$$\overline{H}^k = \overline{H} \times \overline{H} \times \cdots \times \overline{H},$$

则

$$\overline{H}^k \oplus H^k = \{Y \oplus W \mid Y \in \overline{H}^k, W \in H^k\}$$

按通常方式也是一个 Hilbert 空间.

对任意

$$Y \oplus W \in \overline{H}^k \oplus H^k,$$

$$Y = (y_1, y_2, \cdots, y_k),$$

$$W = (w_1, w_2, \cdots, w_k),$$

如同上章定义映射

$$F: Y \oplus W \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & \sum_{i=1}^{k} y_i \otimes e_i & 0 \\ & 0 & \sum_{i=1}^{k} e_i^* \otimes w_i \\ & & 0 \end{pmatrix}.$$

置

$$Y \otimes \xi = \sum_{i=1}^{k} y_i \otimes e_i,$$

$$\eta \otimes W = \sum_{i=1}^{k} e_i^* \otimes w_i,$$

这里

$$Y = (y_1, y_2, \cdots, y_k),$$

$$\xi = (e_1, e_2, \cdots, e_k),$$

$$\eta = (e_1^*, e_2^*, \cdots, e_k^*),$$

$$W = (w_1, w_2, \cdots, w_k).$$

反之,对 $A \in \mathcal{A}$,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & A_{12} & 0 \\ & 0 & A_{23} \\ & & 0 \end{pmatrix},$$

则存在 $Y, W \in H^k$ 满足:

$$A_{12} = Y \otimes \xi,$$

$$A_{23} = \eta \otimes W.$$

注:若 Λ 是 $k \times k$ 矩阵,则 $\Lambda(Y \otimes \xi) = (\Lambda^* Y) \otimes \xi$.

对映射 $\overline{I}: \overline{H} \oplus H \longrightarrow \overline{H} \oplus H$,这里 $y \oplus w \longrightarrow w \oplus y$,有

$$(\overline{I}(y \oplus w), s \oplus t) = (\overline{I}(s \oplus t) + y \oplus w).$$

令 $D \subseteq H^k$ 是线性子空间,P 是 D 上共轭线性算子,且满足 $P^2 x = x, x \in D$. 易见 P 的图$\{Px \oplus x \mid x \in D\}$ 是对$\overline{I}^k$ 不变的子空间,其中$\overline{I}^k = \overline{I} \times \overline{I} \times \cdots \times \overline{I}$($k$ 重积).

于是,子空间 $V \subseteq \overline{H}^k \oplus H^k$ 对$\overline{I}^k$ 是不变的,当且仅当存在子空间 $R \subseteq H^k, D \subseteq R^{\perp}$ 和 D 上的共轭线性算子 P 满足:

$$P^2 X = X, X \in D,$$

并且

$$V = (\overline{R} \oplus R) \oplus \{PX \oplus X \mid X \in D\}.$$

引理 4.3 在上述子空间 V 的结构中,$D \subseteq kerker\phi$.

证明 令

$$A = \begin{pmatrix} 0 & * & * \\ & M & * \\ & & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2,$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & Y \otimes \xi & 0 \\ & 0 & \eta \otimes W \\ & & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_2,$$

则

$$AB=\begin{pmatrix}0 & 0 & * \\ & 0 & \eta\otimes MW \\ & & 0\end{pmatrix}.$$

因此当 $W\in R$ 时，有 $MW, M^* W\in R$. 所以 $R^{\perp}$ 对 $\mathcal{M}_{2\mid H}$ 不变. 当 $W\in D\subseteq R^{\perp}$ 时，有 $MW\in R$. 因此 $MW=0$. 即 $D\subseteq kerker\ \mathcal{M}_{2\mid H}$. 所以 $D\subseteq kerker\phi$.

§4.3 拟向量性质

给出拟向量的结构，为下一节证明主要定理做准备.

定义 4.1　令 q 是从 C^*-代数 $\mathcal{B}$ 到 Hilbert 空间 H^k 的线性映射，$\omega:\mathcal{B}\longrightarrow M_{k\times k}$(矩阵代数) 是代数同态. 称 q 是拟向量，如果

$$q(M_1M_2)=\omega(M_2^*)^*q(M_1)+M_1q(M_2),$$

这里 $M_1, M_2\in\mathcal{B}$.

注：若

$$q(M)=(y_1,y_2,\cdots,y_k)^T, y_i\in H,$$

则有

$$M_1q(M)=(M_1y_1,M_1y_2,\cdots,M_1y_k).$$

引理 4.4　设 $\mathcal{A}$ 是 $\prod_k$ 空间上具有 $A(1,3)$ 性质的第 Ⅰ 类闭算子代数，则存在 C^*-代数 $\mathcal{B}$ 到 H^k 的拟向量 q，使得 $\mathcal{A}$ 中的元素具有下述形式：

$$\begin{pmatrix}\phi(M) & (q(M^*)\oplus *)\otimes\xi & * \\ & M & \eta\otimes(q(M)\oplus *) \\ & & \phi(M^*)^*\end{pmatrix}, M\in\mathcal{B}.$$

证明　由引理 4.1～4.3，可以设 $A_1, A_2\in\mathcal{A}$，并且

$$A_1 = \begin{pmatrix} \phi(M) & Y \otimes \xi & 0 \\ & M & \eta \otimes W \\ & & \phi(M^*)^* \end{pmatrix},$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} \phi(M) & Y' \otimes \xi & 0 \\ & M & \eta \otimes W' \\ & & \phi(M^*)^* \end{pmatrix},$$

这里 $Y \oplus W, Y' \oplus W' \in V^{\perp}$. 则

$$A_1 - A_2 = \begin{pmatrix} 0 & (Y - Y') \otimes \xi & 0 \\ & 0 & \eta \otimes (W - W') \\ & & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_2.$$

所以

$$(Y - Y') \oplus (W - W') \in V, Y = Y', W = W'.$$

可以定义一个映射：

$$q: \mathcal{B} \longrightarrow H^k, q(M) = W,$$

由 $\mathcal{A}$ 的对称性有 $Y = q(M^*)$. 设

$$A_1 = \begin{pmatrix} \phi(M_1) & q(M_1^*) \otimes \xi & 0 \\ & M_1 & \eta \otimes q(M_1) \\ & & \phi(M_1^*)^* \end{pmatrix},$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} \phi(M_2) & q(M_2^*) \otimes \xi & 0 \\ & M_2 & \eta \otimes q(M_2) \\ & & \phi(M_2^*)^* \end{pmatrix},$$

通过计算 A_1A_2 知 q 是拟向量.

定义 4.2 令 $\mathcal{B}$ 是一个 * - 代数, ϕ_0(或 q): $\mathcal{B} \longrightarrow B(Z)$(或 Hilbert 空间 H) 是一个映射. 称 ϕ_0(或 q) 是 * - 闭的, 如果

$$X_i \longrightarrow X \in \mathcal{B},$$

$$\phi_0(X_i) \longrightarrow X_1, \phi_0(X_i^*) \longrightarrow X_1',$$

$$(q(X_i) \longrightarrow X_1, q(X_i^*) \longrightarrow X_1'),$$

蕴涵

$$\phi_0(X) = X_1, \phi_0(X^*) = X_1',$$

$$(q(X) = X_1, q(X^*) = X_1').$$

§4.4 第一类算子代数的形式

本节给出第一类算子代数的另一种形式定理，进而得到两个推论，描述了第一类算子代数的两个特殊情况. 最后给出一个不具有 Shulman 形式的第一类算子代数.

定理 4.1　设$\mathcal{A}$是$\prod_k$空间上有单位具有 A(1,3) 性质的第一类闭算子代数，Z是$\mathcal{A}$的零性不变子空间，且 $\dim Z = k$. 则代数$\mathcal{A}$在正规分解

$$\prod_k = (Z \oplus H) + Z^*$$

下的形式为：

$$\mathcal{A} = \left\{ \begin{pmatrix} \phi(M) & A_{12} & T \\ & M + M_0 & A_{23} \\ & & \phi(M^*)^* \end{pmatrix} \middle| M_0 \in ker\phi, M = \psi(\widetilde{M}) \right\},$$

这里

$$A_{12} = (q(M^*) + q(M_0^*) \oplus Y \oplus PU) \otimes \xi,$$

$$A_{23} = \eta \otimes (q(M) + q(M_0) \oplus W \oplus U),$$

$\widetilde{M} \in \mathcal{B}/ker\phi$，$\psi$是在类$\widetilde{M}$中只取一个代表元的映射；$Y, W \in R, U \in D, T \in E, E \subseteq B(Z^*, Z)$ 是对称的线性子空间. $\mathcal{B} = \mathcal{A}_{|H} \subseteq B(H)$ 是 C* - 代数；$R \subseteq H^k$ 是对$\mathcal{B}$不变的闭线性子空间，$\phi: \mathcal{B} \longrightarrow B(Z)$ 是同态，$q: ker\phi \longrightarrow H^k$ 是 $*$ - 闭的拟向量；$D, R, \{q(M_0) \mid M_0 \in ker\phi\}$ 是相互直交的；$D \subseteq kerker\phi$，$\phi(M)^T U = MU$；P 是闭的共轭线性算子，$P^2 = I$ 并且满足：$(Y, W), (PU, U)$，

$$(q(M_1),q(M_2)),\phi(M)T\in E,T\in E,M_1,M_2,M\in\mathcal{B}.$$

证明 必要性:设$\mathcal{A}$是具有 A(1.3) 性质的第 Ⅰ 类闭算子代数.由定义知$\mathcal{M}_1\cap\mathcal{M}_2\neq\{0\}$.由引理 4.3 有

$$\mathcal{M}_1\cap\mathcal{M}_2=\left\{\begin{pmatrix}0 & Y\otimes\xi & T\\ & 0 & \eta\otimes W\\ & & 0\end{pmatrix}\mid Y\oplus W\in V,T\in E\right\}.$$

由引理 4.4,$\mathcal{A}$中的元有下述形式:

$$\begin{pmatrix}\phi_0(M) & (q(M^*)\oplus Y)\otimes\xi & T\\ & M & \eta\otimes(q(M)\oplus W)\\ & & \phi_0(M^*)^*\end{pmatrix},$$

这里$M\in\mathcal{A}_{|H}$,$Y\oplus W\in V$,$T\in E$.$q:\mathcal{A}_{|H}\longrightarrow H^k$是拟向量,$\phi_0$是线性可乘映射.由$\mathcal{A}$的对称性知,$E$和$\mathcal{A}_{|H}$在“$*$”运算下是封闭的.

因$\mathcal{A}$是$\mathcal{M}_1\cap\mathcal{M}_2$的理想,所以

$$\begin{pmatrix}0 & Y\otimes\xi & T\\ & 0 & \eta\otimes W\\ & & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\phi_0(M) & (q(M^*)\oplus Y')\otimes\xi & T'\\ & M & \eta\otimes(q(M)\oplus W')\\ & & \phi_0(M^*)^*\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}0 & M^*Y\otimes\xi & (W',Y)+T\phi_0(M^*)^*\\ & 0 & \eta\otimes\phi_0(M^*)^*W\\ & & 0\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_1\cap\mathcal{M}_2,$$

$$\begin{pmatrix}\phi_0(M) & (q(M^*)\oplus Y')\otimes\xi & T'\\ & M & \eta\otimes(q(M)\oplus W')\\ & & \phi_0(M^*)^*\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & Y\otimes\xi & T\\ & 0 & \eta\otimes W\\ & & 0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}0 & \phi_0(M)^*Y\otimes\xi & (W,Y')+\phi_0(M)T\\ & 0 & \eta\otimes MW\\ & & 0\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_1\cap\mathcal{M}_2$$

所以

$$\mathcal{A}_{|H}(R \oplus D) \subseteq R \oplus D, (Y, W) \in E, Y \oplus W \in V.$$

于是

$$(Y, W), (P, U) \in E, Y, W \in R, U \in D.$$

令 $D = 0$,则$\mathcal{A}_{|H}R \subseteq R$. 因$\mathcal{A}$对乘法运算封闭,所以,对

$$M_1, M_2 \in \mathcal{A}_{|H}, (q(M_1), q(M)_2) \in E.$$

由引理 4.1 知,$\mathcal{A}_{|H}$是 C* - 代数. 由$\mathcal{A}$是闭的知,q 是 * - 闭的,V 是闭子空间. 所以 R, D 是闭子空间,并且 P 是闭算子.

令 $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$,并且

$$A_1 = \begin{pmatrix} \phi_0(M_1) & (q(M_1^*) \oplus Y_1 \oplus PU_1) \otimes \xi & T_1 \\ & M_1 & \eta \otimes (q(M_1) \oplus W_1 \oplus U_1) \\ & & \phi_0(M_1^*)^* \end{pmatrix};$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & (q(M_2^*) \oplus Y_2 \oplus PU_2) \otimes \xi & T_2 \\ & M_2 & \eta \otimes (q(M_2) \oplus W_2 \oplus U_2) \\ & & 0 \end{pmatrix}.$$

由引理 4.3,4.4 及$\mathcal{M}_2 \subset \mathcal{A}$是理想,有

$$A_1 A_2 = \begin{pmatrix} 0 & Y_{12} & A_{13} \\ & M_1 M_2 & Y_{23} \\ & & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2.$$

其中

$$Y_{12} = \{q((M_1 M_2)^*) \oplus [\phi_0(M_1)^* Y_2 + M_2 Y_1] \oplus \phi_0(M_1)^* PU_2\} \otimes \xi,$$

$$Y_{23} = \eta \otimes \{q(M_1 M_2) \oplus M_1 W_2 \oplus M_1 U_2\}.$$

由$\mathcal{A}_{|H}(R \oplus D) \subseteq R \oplus D$,及$\mathcal{A}_{|H}R \subseteq R$,有$\mathcal{A}_{|H}D \subseteq D$. 由引理 4.3 知 $D \subseteq kerker\phi$.

下面验证 $\phi(M)^T U = MU$. 设 $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$,并且

$$A_1 = \begin{pmatrix} \phi_0(M_1) & (q(M_1^*) \oplus Y_1 \oplus PU_1) \otimes \xi & 0 \\ & M_1 + M_0 & \eta \otimes (q(M_1) \oplus W_1 \oplus U_1) \\ & & \phi_0(M_1^*)^* \end{pmatrix};$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & (q(M_2^*) \oplus Y_2 \oplus PU_2) \otimes \xi & 0 \\ & M_2 & \eta \otimes (q(M_2) \oplus W_2 \oplus U_2) \\ & & 0 \end{pmatrix},$$

其中 $M_0 \in ker\phi, M_1 \notin ker\phi$. 则

$$A_1 A_2 = \begin{pmatrix} 0 & Y \otimes \xi & * \\ & M_1 M_2 + M_0 M_2 & \eta \otimes W \\ & & 0 \end{pmatrix},$$

这里

$$Y = \phi_0(M_1)^* [q(M_2^*) \oplus Y_2 \oplus PU_2] + M_2^* [q(M_1^*) \oplus Y_1 \oplus PU_1],$$

$$W = (M_1 + M_0)[q(M_2) \oplus W_2 \oplus U_2].$$

由 $\mathcal{A}_{|H} R \subseteq R, \mathcal{A}_{|H} D \subseteq D, D \subseteq kerker\phi$，有

$$\phi_0 (M_1)^* PU_2 \oplus M_1 U_2 \in \{PX \oplus X \mid X \in D\},$$

即

$$P\phi_0 (M_1)^* PU = M_1 U, U \in D.$$

因 P 是共轭线性的，及 $P^2 = I$，有

$$\phi_0 (M_1)^T U = M_1 U, M_1 \in \mathcal{B}, M_1 \notin ker\phi, U \in D.$$

充分性：首先验证 $\mathcal{A}$ 是算子代数. 显然 $\mathcal{A}$ 对线性运算是封闭的. 对 $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$，并且

$$A_1 = \begin{pmatrix} \phi(M) & Y_{12}^1 & T_1 \\ & M + M_1 & Y_{23}^1 \\ & & \phi(M^*)^* \end{pmatrix},$$

其中

$$Y_{12}^1 = (q(M^*) + q(M_1^*) \oplus Y_1 \oplus PU_1) \otimes \xi,$$

$$Y_{23}^1 = \eta \otimes (q(M) + q(M_1) \oplus W_1 \oplus U_1);$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} \phi(M') & Y_{12}^2 & T_2 \\ & M' + M_2 & Y_{12}^2 \\ & & \phi(M'^*)^* \end{pmatrix},$$

其中

$$Y_{12}^2 = (q(M'^*) + q(M_2^*) \oplus Y_2 \oplus PU_2) \otimes \xi,$$
$$Y_{12}^2 = \eta \otimes (q(M') + q(M_2) \oplus W_2 \oplus U_2),$$

并且

$$A_1A_2 = \begin{pmatrix} \phi(M)\phi(M') & Y \otimes \xi & T \\ & (M + M_1)(M' + M_2) & \eta \otimes W \\ & & \phi(M^*)^*\phi(M'^*)^* \end{pmatrix},$$

其中

$$\begin{aligned} Y = {} & \phi(M)^*[q(M'^*) + q(M_2^*) \oplus Y_2 \oplus PU_2] + \\ & (M'^* + M_2^*)[q(M^*) + q(M_1^*) \oplus Y_1 \oplus PU_1] \\ = {} & [q((MM')^*) + q((M_1M' + MM_2 + M_1M_2)^*)] \oplus \\ & [\phi(M)^*Y_2 + (M'^* + M_2^*)] \oplus [\phi(M)^*PU_2 + M'^*PU_1]; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W = {} & (M + M_1)[q(M') + q(M_2) \oplus W_2 \oplus U_2] + \\ & \phi(M^*)^*[q(M) + q(M_1) \oplus W_1 \oplus U_1] \\ = {} & [q(MM') + q(M_1M' + MM_2 + M_1M_2)] \oplus \\ & [(M + M_1)W_2 + \phi(M')^*W_1] \oplus [MU_2 + \phi(M')^*U_1]; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T = {} & \phi(M)T_2 + (q(M') + q(M_2), q(M^*) + q(M_1)^*) + \\ & (W_2, Y_1) + (U_2, PU_1) + T_1\phi(M'^*)^*. \end{aligned}$$

因

$$PMU_2 = P\phi(M)^TU_2 = P\phi(M)^TPPU_2 = \phi(M)^*PU_2,$$
$$P\phi(M'^*)^*U_1 = PM'^{T*}U_1 = PM'^{T*}PPU_1 = M'PU_1,$$

与

$$A_1^{\#}=\begin{pmatrix}\phi(M^*) & Y_{12} & T_1^* \\ & M^*+M_1^* & Y_{23} \\ & & \phi(M)^*\end{pmatrix}$$

这里

$$Y_{12}=(q(M)+q(M_1)\oplus W_1\oplus U_1)\otimes\xi,$$

$$Y_{23}=\eta\otimes(q(M^*)+q(M_1^*)\oplus Y_1\oplus PU_1).$$

因此$\mathcal{A}$对乘法和“#”运算是封闭的.所以$\mathcal{A}$是一个代数.因为$\mathcal{B}$是 C^* - 代数,q 是 $*$ - 闭的,R 和 D 都是闭子空间,并且 P 是闭算子,所以$\mathcal{A}$是闭算子代数.

算子代数$\mathcal{A}$的理想

$$\mathcal{M}_1=\left\{\begin{pmatrix}0 & Y\otimes\xi & T \\ & 0 & \eta\otimes W \\ & & 0\end{pmatrix}\middle| Y\oplus W\in V,T\in E\right\};$$

$$\mathcal{M}_2=\left\{\begin{pmatrix}0 & (q(M_0^*)\oplus Y)\otimes\xi & T \\ & M_0 & \eta\otimes(q(M_0)\oplus W) \\ & & 0\end{pmatrix}\middle| Y\oplus W\in V,T\in E\right\},$$

其中 $M_0\in ker\phi$.因此$\mathcal{M}_1\neq\{0\}$,$\mathcal{M}_1\subseteq\mathcal{M}_2$.所以$\mathcal{A}$是第 Ⅰ 类的闭算子代数.

推论 1 在定理 4.1 中,如果 $\phi(M)=tI_Z$,$M\in\mathcal{B}$,则代数$\mathcal{A}$相对于正规分解

$$\prod_k=(Z\oplus H)+Z^*$$

有下述形式:

$$\mathcal{A}=\left\{\begin{pmatrix}tI_Z & (q(M_0^*)\oplus Y\oplus PU)\otimes\xi & T \\ & tI+M_0 & \eta\otimes(q(M_0)\oplus W\oplus U) \\ & & tI_{Z^*}\end{pmatrix}\middle| M_0\in ker\phi\right\},$$

其中 $Y,W\in R$,$U\in D$,$T\in E$,$E\subseteq B(Z^*,Z)$ 是对称线性子空间. $\mathcal{B}=\mathcal{A}_{|H}\subseteq B(H)$,$ker\phi$ 是 C^* - 代数;$R\subseteq H^k$ 是对 $ker\phi$ 不变的子空间,$q:ker\phi\longrightarrow H^k$ 是一个 $*$ - 闭的拟向量;D,R,$\{q(M_0)\mid M_0\in ker\phi\}$ 相互直交的,$D\subseteq kerker\phi$,$\phi(M)^TU=MU$;P 是闭的共轭线性算子,P^2

$= I$,并且满足：

$$(Y,W),(PU,U),(q(M_1),q(M_2)),\phi(M)T \in E,$$

$$M_1,M_2 \in ker\phi, T \in E, M \in ker\phi.$$

证明 只需证 $q(I) = 0$,这由拟向量定义即得.

推论 2 在定理 4.1 中,如果 $ker\phi = \{0\}$,则代数$\mathcal{A}$相对于正规分解

$$\prod_k = (Z \oplus H) + Z^*$$

有下述形式：

$$\mathcal{A} = \left\{ \begin{pmatrix} \phi(M) & (q(M^*) \oplus Y \oplus PU) \otimes \xi & T \\ & M & \eta \otimes (q(M) \oplus W \oplus U) \\ & & \phi(M^*)^* \end{pmatrix} \middle| M = \mathcal{B} \right\},$$

这里 $Y,W \in R, U \in D, T \in E, E \subseteq B(Z^*, Z)$ 是对称线性子空间. $\mathcal{B} = \mathcal{A}_{|H} \subseteq B(H)$ 是 C^*-代数;$R \subseteq H^k$ 是对$\mathcal{B}$不变的子空间,ϕ: $\mathcal{B} \longrightarrow B(Z)$ 是代数同态,q: $\mathcal{B} \longrightarrow H^k$ 是 $*$-闭拟向量;$D,R,\{q(M) \mid M \in \mathcal{B}\}$ 是相互直交的;$D \subseteq kerker\phi, \phi(M)^T U = MU$;$P$ 是共轭线性闭算子,并且 $P^2 = I$. 以及

$$(Y,W),(PU,U),(q(M_1),q(M_2)),\phi(M)T \in E, T \in E, M_1,M_2,M \in \mathcal{B}.$$

例 4.1 令$\prod_3$ 是 9 维的 Pontrjagin 空间,且有正规分解

$$\prod_3 = (Z \oplus H) + Z^*,$$

其中

$$Z = span\{\xi_1,\xi_2,\xi_3\}$$

与

$$Z^* = span\{\eta_1,\eta_2,\eta_3\}$$

是对偶.

H 一个 6 维的 Hilbert 空间.置

$$\mathcal{A}_0 = \left\{ \begin{pmatrix} \Lambda & (q(M^*) \oplus Y \oplus PU) \otimes \xi & T \\ & \begin{pmatrix} \Lambda & \\ & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \\ & M \end{pmatrix} & \eta \otimes (q(M) \oplus W \oplus U) \\ & & \Lambda \end{pmatrix} \middle| T \in M_{2\times 2} \right\},$$

这里

$$\Lambda=\begin{pmatrix}\alpha & & \\ & \beta & \\ & & \gamma\end{pmatrix}, M=\begin{pmatrix}\lambda & & \\ & \mu & \\ & & 0\end{pmatrix},$$

$$Y=(y_1,y_2,y_3)^T, W=(w_1,w_2,w_3)^T,$$

$$y_1=(0,0,0,r,0,0)^T, y_2=(0,0,0,s,0,0)^T, y_3=(0,0,0,t,0,0)^T,$$

$$w_1=(0,0,0,r',0,0)^T, w_2=(0,0,0,s',0,0)^T, w_3=(0,0,0,t',0,0)^T,$$

$$U=(0,0,u)^T, u=(0,0,0,0,0,v)^T,$$

$$PU=(0,0,\bar{u})^T, q(M)=q(\begin{pmatrix}0 & \\ & M\end{pmatrix})=(0,w,0)^T,$$

$$0=(0,0,0,0,0,0)^T, w=(0,0,0,0,\mu,0)^T,$$

$$\alpha,\beta,\lambda,\mu,r,s,t,r',s't'u'v'\in\mathbf{C}, T\in M_{3\times3}.$$

易见$\mathcal{A}_0$是第 Ⅰ 类闭的算子代数,但不具有 S. V. Shulman 的形式.

§4.5 Π_1 空间上一个算子代数

本节是对Π_1 空间上一般对称算子代数的结构做一些理论推导,证明具有 $A(1,3)$ 性质的第 0 类算子代数必是对角的.

Shulman 给出Π_1 空间上闭的有单位元的第 0 类一般对称算子代数的形式,如下:

$$\left\{\begin{pmatrix}\lambda & & \\ & \lambda I_H+M & \\ & & \lambda\end{pmatrix}:\lambda\in\mathbf{C}. M\in\mathcal{B}\right\},$$

其中 I_H 是 H 上的单位算子,且 $I_H\notin\mathcal{B}$,$\mathcal{B}$是 H 上的 C^* - 代数.

本节构造了Π_1 空间上对称闭有单位元非对角的第 0 类一般算子代数的一个例子,说明第 0 类算子代数未必都是对角的.证明了具有 $A(1,3)$ 性质的第 0 类算子代数必是对角的.

$\prod_1$ 空间有正则分解

$$\prod_1 = H_+ \oplus_- H$$

其中$(H_+, [\cdot, \cdot]_+)$是 Hilbert 空间,$(H_-, -[\cdot, \cdot]_-)$是一维 Hilbert 空间. 这里$[\cdot, \cdot]_\pm$分别是$[\cdot, \cdot]$在$H_\pm$上的限制. $\prod_1$ 空间上的正定内积记为$(\cdot, \cdot) = [\cdot, \cdot]_+ - [\cdot, \cdot]_-$,$\prod_1$ 按$(\cdot, \cdot)$成为 Hilbert 空间. 相应的度规算子为 J. 则对 $x, y \in \prod_1$,

$$(x, y) = [Jx, y] = [x, Jy].$$

$\prod_1$ 空间上的算子关于不定内积的共轭算子记为 $A^\#$,而关于正定内积的共轭算子记为 A^*,并且有

$$A^\# = JA^*J.$$

用$\mathcal{A}$表示$\prod_1$ 空间上有界线性算子所构成的代数 $B(\prod_1)$ 的子代数.

由$\mathcal{A}$的对称性和$\mathcal{A} Z \subseteq Z$,知 Z 的直交补也是$\mathcal{A}$的不变子空间. 于是$\mathcal{A}$中元素具有下列形式:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & A_{12} & t \\ & A_{22} & A_{23} \\ & & \mu \end{pmatrix} : \lambda \in \mathbf{C}. M \in \mathcal{B},$$

这里 $A_{22} \in \mathcal{A}_{|H}$,$A_{12} \in B(H, Z)$,$A_{23} \in B(Z^*, H)$. 令

$$\mathcal{M}_1 = \{A \mid A \in \mathcal{A}, A_{22} = 0\},$$

则$\mathcal{M}_1$是$\mathcal{A}$的双侧理想. 设$\mathcal{A}$是$\prod_1$ 空间上一般的对称算子代数,若$\mathcal{M}_1 = \{0\}$,则$\mathcal{A}$是第 0 类的算子代数.

定理 4.2　设

$$\mathcal{A}_0 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & A_{12} & A_{13} \\ & M & A_{23} \\ & & 0 \end{pmatrix} : M \in \mathcal{B}, A_{12} \in B(H, Z), A_{13} \in B(Z^*, Z), A_{23} \in B(Z^*, H) \right\}.$$

若$\mathcal{A}_0$是第 0 类的算子代数,则存在线性映射:

$$L_1 : \mathcal{B} \longrightarrow B(H, Z);$$

$$L_1' : \mathcal{B} \longrightarrow B(Z^*, H);$$

$$L_2 : \mathcal{B} \longrightarrow B(Z^*, Z).$$

满足条件：

$$L_1(MN) = L_1(M)N;$$

$$L_2(M^*) = L_2(M)^*;$$

$$L_2(MN) = L_1(M)L_1(N^*)^*.$$

使的

$$A_{12} = L_1(M), A_{13} = L_2(M), A_{23} = L_1'(M) = L_1(M^*)^*.$$

证明 由$\mathcal{A}$是第 0 类的算子代数，存在映射：

$$L_1 : \mathcal{B} \longrightarrow B(H, Z);$$

$$L_1' : \mathcal{B} \longrightarrow B(Z^*, H);$$

$$L_2 : \mathcal{B} \longrightarrow B(Z^*, Z);$$

使得

$$A_{12} = L_1(M), A_{13} = L_2(M), A_{23} = L_1'(M).$$

显然 L_1, L_2, L_1'都是线性的. 对

$$A = \begin{pmatrix} 0 & L_1(M) & L_2(M) \\ & M & L_1'(M) \\ & & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{A},$$

由$\mathcal{A}$对称，有

$$A^{\#} = \begin{pmatrix} 0 & L_1'(M)^* & L_2(M)^* \\ & M^* & L_1(M)^* \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & L_1(M^*) & L_2(M^*) \\ & M^* & L_1'(M^*) \\ & & 0 \end{pmatrix}.$$

所以

$$L_2(M^*) = L_2(M)^*,$$

$$L_1'(M) = L_1(M^*)^*,$$

即

$$A = \begin{pmatrix} 0 & L_1(M) & L_2(M) \\ & M & L_1(M^*)^* \\ & & 0 \end{pmatrix}.$$

再设

$$B = \begin{pmatrix} 0 & L_1(N) & L_2(N) \\ & N & L_1(N^*)^* \\ & & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{A},$$

则由$\mathcal{A}$对乘法封闭，有

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & L_1(M)N & L_1(M)L_1(N^*)^* \\ & MN & ML_1(N^*)^* \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & L_1(MN) & L_2(MN) \\ & MN & L_1((MN)^*)^* \\ & & 0 \end{pmatrix}.$$

于是

$$L_1(MN) = L_1(M)N,$$

$$L_2(MN) = L_1(M)L_1(N^*)^*.$$

在$\prod_1$的正规分解中，取 H 为 3 维 Hilbert 空间，

$$\mathcal{B}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & & \\ & \lambda & \\ & & \mu \end{pmatrix} \mid \lambda, \mu \in \mathbf{C} \right\}.$$

不难看出$\mathcal{B}_1$是 H 上无单位的 C^* - 代数. 又设 $p,q\in\mathcal{B}_1$，且 p,q 都是投影. 由于 L_1,L_2 都是一秩算子. 令

$$L_1(p)=Y\otimes e,$$

$$L_1(q)=Z\otimes e,$$

其中 $Y=(0,1,0)^T,Z=(0,0,1)^T$，则有下面的结论.

推论 3 在定理 4.2 中，

$$\mathcal{A}_0=\left\{\begin{pmatrix}0 & (0,\bar{\lambda},\bar{\mu})^T\otimes e & \lambda+\mu\\ & \begin{pmatrix}0 & & \\ & \lambda & \\ & & \mu\end{pmatrix} & e^*\otimes(0,\lambda,\mu)^T\\ & & 0\end{pmatrix}:\lambda,\mu\in\mathbf{C}\right\}.$$

证明 对 $M=\begin{pmatrix}0 & & \\ & \lambda & \\ & & \mu\end{pmatrix}$，由定理 4.2

$$\begin{aligned}L_1(M)&=L_1(\lambda p)+L_1(\mu q)\\&=\lambda L_1(p)+\mu L_1(q)\\&=\lambda(Y\otimes e)+\mu(Z\otimes e)\\&=(\bar{\lambda}Y+\bar{\mu}Z)\otimes e\\&=(0,\bar{\lambda},\bar{\mu})^T\otimes e.\\L_2(M)&=L_2(\lambda p)+L_2(\mu q)\\&=\lambda L_1(p)L_1(p^*)^*+\mu L_1(q)L_1(q^*)^*\\&=\lambda(Y\otimes e)(Y\otimes e)^*+\mu(Z\otimes e)(Z\otimes e)^*\\&=\lambda+\mu.\end{aligned}$$

于是结论成立.

例 4.2 在$\prod_1$ 空间的正规分解中，令 H 是 3 维 Hilbert 空间，且

$$\mathcal{A}=\left\{\begin{pmatrix}\alpha & (0,\overline{\lambda},\overline{\mu})^{T}\otimes e & \lambda+\mu\\ & \alpha I_{H}+\begin{pmatrix}0 & & \\ & \lambda & \\ & & \mu\end{pmatrix} & e^{*}\otimes(0,\lambda,\mu)^{T}\\ & & \alpha\end{pmatrix}:\alpha,\lambda,\mu\in\mathbf{C}\right\},$$

其中 I_H 是 H 上的单位算子. 则 $\mathcal{A}_0$ 是 $\prod_1$ 空间上的第 0 类算子代数,但 $\mathcal{A}$ 不是对角的.

证明　首先说明 $\mathcal{A}_0$ 是一个对称算子代数. 为此只要证明 $\mathcal{A}_0$ 对线性运算,乘法运算和"#"运算封闭即可. 事实上,对 $\beta\in\mathbf{C}$;$A_1,A_2\in\mathcal{A}_0$,且

$$A_1=\begin{pmatrix}\alpha_1 & (0,\overline{\lambda_1},\overline{\mu_1})^{T}\otimes e & \lambda_1+\mu_1\\ & \alpha_1 I_{H}+\begin{pmatrix}0 & & \\ & \lambda_1 & \\ & & \mu_1\end{pmatrix} & e^{*}\otimes(0,\lambda_1,\mu_1)^{T}\\ & & \alpha_1\end{pmatrix},$$

$$A_2=\begin{pmatrix}\alpha_2 & (0,\overline{\lambda_2},\overline{\mu_2})^{T}\otimes e & \lambda_2+\mu_2\\ & \alpha_2 I_{H}+\begin{pmatrix}0 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \mu_2\end{pmatrix} & e^{*}\otimes(0,\lambda_2,\mu_2)^{T}\\ & & \alpha_2\end{pmatrix},$$

$\alpha_1,\lambda_1,\mu_1,\alpha_2,\lambda_2,\mu_2\in\mathbf{C}$. 则

$$\beta A_1=\begin{pmatrix}\beta\alpha_1 & (0,\overline{\beta\lambda_1},\overline{\beta\mu_1})^{T}\otimes e & \beta\lambda_1+\beta\mu_1\\ & \beta\alpha_1 I_{H}+\begin{pmatrix}0 & & \\ & \beta\lambda_1 & \\ & & \beta\mu_1\end{pmatrix} & e^{*}\otimes(0,\beta\lambda_1,\beta\mu_1)^{T}\\ & & \beta\alpha_1\end{pmatrix};$$

$$A_1 + A_2 = \begin{pmatrix} \alpha_1 + \alpha_2 & (0, \overline{\lambda_1 + \lambda_2}, \overline{\mu_1} + \mu_2)^T \otimes e & \lambda_1 + \lambda_2 + \mu_1 + \mu_2 \\ & \alpha_1 + \alpha_2 I_H + \begin{pmatrix} 0 & & \\ & \lambda_1 + \lambda_2 & \\ & & \mu_1 + \mu_2 \end{pmatrix} & e^* \otimes (0, \lambda_1 + \lambda_2, \mu_1 + \mu_2)^T \\ & & \alpha_1 + \alpha_2 \end{pmatrix};$$

$$A_1 A_2 = \begin{pmatrix} \alpha_1 \alpha_2 & (0, \overline{\alpha_1 \lambda_2 + \alpha_2 \lambda_1 + \lambda_1 \lambda_2}, \overline{\alpha_1 \mu_2 + \alpha_2 \mu_1 + \mu_1 \mu_2})^T \otimes e & \gamma \\ & \alpha_1 \alpha_2 I_H + \begin{pmatrix} 0 & & \\ & \alpha_1 \lambda_2 + \alpha_2 \lambda_1 + \lambda_1 \lambda_2 & \\ & & \alpha_1 \mu_2 + \alpha_2 \mu_1 + \mu_1 \mu_2 \end{pmatrix} & e^* \otimes \delta \\ & & \alpha_1 \alpha_2 \end{pmatrix};$$

$$\gamma = \alpha_1 \mu_2 + \alpha_2 \mu_1 + \alpha_1 \lambda_2 + \alpha_1 \lambda_2 + \lambda_1 \lambda_2 + \mu_1 \mu_2,$$

$$\delta = (0, \alpha_1 \lambda_2 + \alpha_2 \lambda_1 + \lambda_1 \lambda_2, \alpha_1 \mu_2 + \alpha_2 \mu_1 + \mu_1 \mu_2)^T;$$

$$A_1^{\#} = \begin{pmatrix} \overline{\alpha_1} & (0, \lambda_1, \mu_1)^T \otimes e & \overline{\lambda_1} + \overline{\mu_1} \\ & \overline{\alpha_1} I_H + \begin{pmatrix} 0 & & \\ & \overline{\lambda_1} & \\ & & \overline{\mu_1} \end{pmatrix} & e^* \otimes (0, \overline{\lambda_1}, \overline{\mu_1})^T \\ & & \overline{\alpha_1} \end{pmatrix}.$$

故$\mathcal{A}_0$是一个对称算子代数.

显然$\mathcal{A}_0$有单位且闭. 由于 $\alpha I_H + \begin{pmatrix} 0 & & \\ & \lambda & \\ & & \mu \end{pmatrix} = 0$,等价于 $\alpha = \lambda = \mu = 0$. 因此$\mathcal{A}$是第 0 类算子代数. 显然$\mathcal{A}$不是对角的.

对Π_1 空间上的算子代数$\mathcal{A}$,若 $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ & 0 & 0 \\ & & 0 \end{pmatrix} \in A$,则$\mathcal{A}$具有 $A(1,3)$ 性质.

定理 4.3 Π_1 空间上具有 $A(1,3)$ 性质的第 0 类算子代数是对角的.

证明 若$\mathcal{A}$具有 $A(1,3)$ 性质,则对任意

$$A=\begin{pmatrix}A_{11} & A_{12} & A_{13}\\ & A_{22} & A_{23}\\ & & A_{33}\end{pmatrix}\in\mathcal{A},$$

有

$$A=\begin{pmatrix}0 & 0 & A_{13}\\ & 0 & 0\\ & & 0\end{pmatrix}\in\mathcal{A}.$$

于是

$$B=\begin{pmatrix}A_{11} & A_{12} & 0\\ & A_{22} & A_{23}\\ & & A_{33}\end{pmatrix}\in\mathcal{A}.$$

设 $A_{12}=y\otimes e, y\in H$，则

$$\begin{aligned}B^{\#}&=JB^{*}J\\&=\begin{pmatrix}A_{33}^{*} & A_{23}^{*} & 0\\ & A_{22^{*}} & A_{12}^{*}\\ & & A_{11}^{*}\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}A_{33}^{*} & A_{23}^{*} & 0\\ & A_{22^{*}} & e^{*}\otimes y\\ & & A_{11}^{*}\end{pmatrix}\in\mathcal{A}\end{aligned}$$

而

$$BB^{\#}=\begin{pmatrix}* & * & (y,y)\\ & * & *\\ & & *\end{pmatrix}\in\mathcal{A},$$

这里(y,y)是内积，即有

$$\begin{pmatrix}0 & 0 & (y,y)\\ & 0 & 0\\ & & 0\end{pmatrix}\in\mathcal{A}.$$

再由$\mathcal{A}$是第 0 类的,有$(y,y)=0$,即 $y=0$. 于是 $A_{12}=0$. 同理 $A_{23}=0$. 故$\mathcal{A}$是对角的.

§4.6 弱闭、一致闭等价条件

本节研究 Pontrjagin 空间上一组 Shulman 意义下的六类一般对称算子代数弱闭和一致闭的等价条件,得到一个等价条件定理.

C 表示复数集,M_k 表示 **C** 上的 $k\times k$ 矩阵代数. 令

$$Y=(y_1,y_2,\cdots,y_k),$$

$$Z=(z_1,z_2,\cdots,z_k).$$

将有限秩算子

$$(y_1\otimes e_1+y_2\otimes e_2+\cdots+y_k\otimes e_k),$$

和

$$(e_1^*\otimes z_1+e_2^*+\cdots+e_k^*\otimes z_k)$$

分别用 $Y\otimes\xi$ 和 $\eta\otimes Z$ 表示.

(1) 令$\mathcal{U}$是 Hilbert 空间 H 上的算子 $*$-代数,I_H 是 H 上的单位算子,并且 $I_H\notin\mathcal{U}$. 置

$$C^0(\mathcal{U})=\left\{\begin{pmatrix}tI_k & & \\ & tI_H+M & \\ & & tI_k\end{pmatrix}: t\in\mathbf{C},\text{单位算子 } I_k\in M_k, M\in\mathcal{U}\right\}.$$

(2) 令$\mathcal{U}$是 Hilbert 空间 H 上的算子 $*$-代数,I_H 是 H 上的单位算子,并且 $I_H\notin\mathcal{U}$, $q_i:\mathcal{U}\longrightarrow H$,是线性映射,且满足:

$$q_i(AB)=Aq_i(B), A,B\in\mathcal{U}.$$

令 R_i 是 H 中对$\mathcal{U}$不变的子空间,R_i 直交于$q_i(\mathcal{U})$,D_i 直交于R_i,P_i 是共轭线性算子,且满足 $P_i^2=I_{D_i}$,这里 I_{D_i} 是 D_i 上的单位算子,$i=1,2,\cdots,k$.

设

$$R = R_1 \times R_2 \times \cdots \times R_k,$$

$$Q = q_1 \times q_2 \times \cdots \times q_k,$$

$$P = P_1 \times P_2 \times \cdots \times P_k,$$

$$D = D_1 \times D_2 \times \cdots \times D_k,$$

$M \in \mathcal{U}$,

$$\mathbf{M} = M \times M \times \cdots \times M(k\ \text{重积}),$$

并且

$$\mathbf{M}^* = M^* \times M^* \times \cdots \times M^*(k\ \text{重积}),$$

置

$$C^1(\mathcal{U}, Q, R, D, P) = \left\{ \begin{pmatrix} tI_k & (Q(\mathbf{M}^*) + Y + Pu) \otimes \xi & T \\ & tI_H + M & \eta \otimes (Q(\mathbf{M}) + Z + u) \\ & & tI_k \end{pmatrix} \begin{array}{l} t \in \mathbf{C}, I_k \in M_k \text{ 是单位矩阵}, \\ T \in M_k, M \in \mathcal{U}, Y, Z \in R, u \in D \end{array} \right\}$$

(3) 令$\mathcal{U}$是 Hilbert 空间 H 上算子 $*$-代数，I_H 是 H 上的单位算子，$I_H \in \mathcal{U}$. 子空间 $R_i \in H$ 是$\mathcal{U}$的不变子空间，$R = R_1 \times R_2 \cdots R_k$. 置

$$C^{2a}(\mathcal{U}) = \left\{ \begin{pmatrix} \Lambda & & \\ & M & \\ & & \Lambda \end{pmatrix} : \Lambda \in M_k, M \in \mathcal{U} \right\};$$

$$C^{2b}(\mathcal{U}, R) = \left\{ \begin{pmatrix} \Lambda & Y \otimes \xi & T \\ & M & \eta \otimes Z \\ & & \Lambda \end{pmatrix} : \Lambda, T \in M_k, M \in \mathcal{U}, Y, Z \in R \right\};$$

$$C^{3a}(\mathcal{U}) = \left\{ \begin{pmatrix} \Lambda & & \\ & M & \\ & & \Gamma \end{pmatrix} : \Lambda, \Gamma \in M_k, M \in \mathcal{U} \right\};$$

$$C^{3b}(\mathcal{U},R)=\left\{\begin{pmatrix}\Lambda & Y\otimes\xi & T\\ & M & \eta\otimes Z\\ & & \Gamma\end{pmatrix}:\Lambda,\Gamma,T\in M_k,M\in\mathcal{U},Y,Z\in R\right\};$$

则 $C^0(\mathcal{U}),C^1(\mathcal{U},Q,R,D,V),C^{2a}(\mathcal{U}),C^{2b}(\mathcal{U},R),C^{3a}(\mathcal{U}),C^{3b}(\mathcal{U},R)$ 分别是 Pontrjagin 空间$\prod_k$上第 0，Ⅰ，$Ⅱ_a$，$Ⅱ_b$，$Ⅲ_a$ 和 $Ⅲ_b$ 类的一般对称算子代数.

这里 q 是 Hilbert 空间 H 上算子 *-代数$\mathcal{U}$到 H 中的线性映射，算子网 $M_n\in\mathcal{U}$按一致(或弱算子)拓扑收敛于 $M\in\mathcal{U}$. 称 q 是对称(或弱对称)闭的，如果 $q(M_n)$ 和 $q(M_n^*)$ 分别收敛于 $q(M)$ 和 $q(M^*)$.

定理 4.4 设 $C^0(\mathcal{U}),C^1(\mathcal{U},Q,R,D,P),C^{2a}(\mathcal{U}),C^{2b}(\mathcal{U},R),C^{3a}(\mathcal{U}),C^{3b}(\mathcal{U},R)$ 分别是$\prod_k$空间上第 0，Ⅰ，$Ⅱ_a$，$Ⅱ_b$，$Ⅲ_a$ 和 $Ⅲ_b$ 类的一般对称算子代数. 则下列结论成立.

(1)$C^0(\mathcal{U}),C^{2a}(\mathcal{U})$ 或 $C^{3a}(\mathcal{U})$ 是一致(弱)闭的，当且仅当$\mathcal{U}$是 Hilbert 空间 H 上的 C*-代数(W^*-代数).

(2)$C^1(\mathcal{U},Q,R,D,P)$ 是一致(弱)闭的，当且仅当$\mathcal{U}$是 Hilbert 空间 H 上的 C*-代数(W^*-代数)，并且 R 是闭子空间，P 是闭算子，Q 对称闭的.

(3)$C^{2b}(\mathcal{U},R)$ 或 $C^{3b}(\mathcal{U},R)$ 是一致(弱)闭的，当且仅当$\mathcal{U}$是 Hilbert 空间 H 上的 C*-代数(W^*-代数)，且 R 是闭子空间.

证明 (1) 与(3) 是(2) 的特殊情况. 现在来证(2).

(Ⅰ) 一致闭的情况. 设算子网

$$\begin{pmatrix}t_nI_k & (Q(\mathbf{M}_n^*)+Y_n+Pu_n)\otimes\xi & T_n\\ & t_nI_H+M_n & \eta\otimes(Q(\mathbf{M}_n)+Z_n+u_n)\\ & & t_nI_k\end{pmatrix}\in C^1(\mathcal{U},Q,R,D,P)$$

按一致拓扑收敛于

$$\begin{pmatrix}tI_k & (Q(\mathbf{M}^*)+Y+Pu)\otimes\xi & T\\ & tI_H+M & \eta\otimes(Q(\mathbf{M})+Z+u)\\ & & tI_k\end{pmatrix},$$

则有

(1) 数列 t_n 收敛于 t.

(2) 算子网 $t_nI_H+M_n$ 按 Hilbert 空间 H 上的算子范数收敛于 tI_H+M.

(3)T_n 按相应空间上的算子范数收敛于 T.

(4)$Q(\mathbf{M}_n)+Z_n+u_n$ 按相应空间上的范数拓扑收敛于 $Q(\mathbf{M})+Z+u$.

(5)$Q(\mathbf{M}_n^*)+Y_n+Pu_n$ 按相应空间上的范数拓扑收敛于 $Q(\mathbf{M}^*)+Y+Pu$.

由(1) 和(2) 知网 M_n 按一致拓扑收敛于 M. 于是 $*$ - 代数 $\mathcal{U}$ 是 C^* - 代数. 由(4) 和(5), 以及 R, D 和 Q 的值域三部分两两直交, 有

$$Z_n \longrightarrow Z,$$

$$u_n \longrightarrow u,$$

$$Pu_n \longrightarrow Vu,$$

$$Y_n \longrightarrow Y,$$

$$Q(\mathbf{M}_n) \longrightarrow Q(\mathbf{M}),$$

$$Q(\mathbf{M}_n^*) \longrightarrow Q(\mathbf{M}^*).$$

所以 R 是闭子空间, P 是闭算子, 并且 Q 是对称闭的.

反之, 设算子网

$$\begin{pmatrix} t_n I_k & (Q(\mathbf{M}_n^*)+Y_n+Pu_n)\otimes\xi & T_n \\ & t_n I_H + M_n & \eta\otimes(Q(\mathbf{M}_n)+Z_n+u_n) \\ & & t_n I_k \end{pmatrix} \in \mathbf{C}^1(\mathcal{U},Q,R,D,P)$$

且按一致拓扑收敛于 A. 我们来证明 $A\in C^1(\mathcal{U},Q,R,D,P)$.

首先, 数列 t_n 是收敛的. 令 t_n 收敛于 t. 由算子网 $t_nI_H+M_n$ 按一致拓扑是 Cauchy 网, $\mathcal{U}$ 是 H 上的 C^* - 代数, 知 M_n 按一致拓扑收敛. 令 M_n 收敛于 M, 则 $M\in\mathcal{U}$.

类似地, 网 T_n 按相应空间上的算子范数收敛. 令 T_n 收敛于 T, 则 $T\in M_k$.

其次, 因

$$\eta\otimes(Q(\mathbf{M}_n)+Z_n+u_n)$$

与

$$(Q(\mathbf{M}_n^*)+Y_n+Pu_n)\otimes\xi$$

分别按相应空间的算子范数是 *Cauchy* 网, 并且 Q 的值域, R 和 D 是相互直交的, 所以有

$$\|\eta\otimes(Q(\mathbf{M}_n)+Z_n+u_n)\| = \|\eta\|(\|Q(\mathbf{M}_n)\|+\|Z_n\|+\|u_n\|),$$

$$\|(Q(\mathbf{M}_n^*)+Y_n+Pu_n)\otimes\xi\| = (\|Q(\mathbf{M}_n^*)\|+\|Y_n\|+\|Pu_n\|)\|\xi\|.$$

于是,$Q(\mathbf{M}_n)$,$Q(\mathbf{M}_n^*)$,Y_n,Z_n,u_n 和 Pu_n 分别按空间 H 上的范数收敛.令 Y_n 收敛于 Y,Z_n 收敛于 Z,则由 R 是闭的有 $Y,Z\in R$.类似地,令 u_n 收敛于 u,则由 P 是闭的,知 Pu_n 收敛于 Pu.

最后,由 Q 是对称闭的,知 $Q(\mathbf{M}_n)$ 和 $Q(\mathbf{M}_n^*)$ 分别收敛于 $Q(\mathbf{M})$ 和 $Q(\mathbf{M}^*)$.

所以,

$$A=\begin{pmatrix} tI_k & (Q(\mathbf{M}^*)+Y+Pu)\otimes\xi & T \\ & tI_H+M & \eta\otimes(Q(\mathbf{M})+Z+u) \\ & & tI_k \end{pmatrix},$$

并且 $A\in\mathbf{C}^1(\mathscr{U},Q,R,D,P)$.

(Ⅱ)弱闭的情况.设算子网

$$\begin{pmatrix} t_nI_k & (Q(\mathbf{M}_n^*)+Y_n+Pu_n)\otimes\xi & T_n \\ & t_nI_H+M_n & \eta\otimes(Q(\mathbf{M}_n)+Z_n+u_n) \\ & & t_nI_k \end{pmatrix}$$

按弱算子拓扑收敛于

$$\begin{pmatrix} tI_k & (Q(\mathbf{M}^*)+Y+Pu)\otimes\xi & T \\ & tI_H+M & \eta\otimes(Q(\mathbf{M})+Z+u) \\ & & tI_k \end{pmatrix}.$$

在空间$\prod_k$ 的正规分解

$$\prod\nolimits_k=(Z\oplus H)+Z^*$$

中,令

$$X=x_1\in Z,Y=y_3\in Z^*,$$

则有

$$((t_n-t)I_kx_1,y_3)\longrightarrow 0,$$

因 Z 是 Z^* 的对偶,知 t_n 收敛于 t.

令

$$X=x_2\in H,Y=y_2\in H,$$

则由 Z 直交于 H,知

$$(((t_n - t)I_H + M_n - M)x_2, y_2) \longrightarrow 0.$$

再令 $Y = y_3 \in Z^*$，则有

$$([(Q(\mathbf{M}_n^*) + Y_n + Pu_n) - (Q(\mathbf{M}^*) + Y + Pu)] \otimes \xi x_2, y_3) \longrightarrow 0.$$

于是，算子网 M_n 按弱算子拓扑收敛于 M. 即算子 $*$-代数 $\mathcal{U}$ 是 Hilbert 空间 H 上的 W^*-代数. 由 Q 的值域，R 和 D 是相互直交的，知

$$Q(\mathbf{M}_n^*) \longrightarrow Q(\mathbf{M}^*),$$

$$Y_n \longrightarrow Y,$$

$$u_n \longrightarrow u,$$

按 Hilbert 空间 H 上的范数收敛.

类似地，令

$$X = x_3 \in Z^*, Y = y_1 \in Z, Y = y_2 \in H,$$

则有

$$((T_n - T)J_1 x_3, y_1) \longrightarrow 0,$$

且

$$(\eta \otimes [(Q(\mathbf{M}_n) + Z_n + u_n) - (Q(\mathbf{M}) + Z + u)]x_3, y_2) \longrightarrow 0.$$

于是 T_n 弱收敛于 T，并且

$$Q(\mathbf{M}_n) \longrightarrow Q(\mathbf{M}),$$

$$Z_n \longrightarrow Z,$$

$$u_n \longrightarrow u,$$

按 Hilbert 空间 H 上的范数收敛.

反之，设算子网

$$\begin{pmatrix} t_n I_k & (Q(\mathbf{M}_n^*) + Y_n + Pu_n) \otimes \xi & T_n \\ & t_n I_H + M_n & \eta \otimes (Q(\mathbf{M}_n) + Z_n + u_n) \\ & & t_n I_k \end{pmatrix}$$

在 $C^1(\mathcal{U}, Q, R, D, P)$ 中按弱算子拓扑收敛于算子 A，则它是弱 Cauchy 网. 于是，利用必要

性证明的方法,有Y_n,Z_n,u_n,$Q(\mathbf{M}_n)$,$Q(\mathbf{M}_n^*)$,Pu_n和t_n,都是相应空间的Cauchy网,且$T_n \in M_k$,$M_n \in \mathcal{U}$是弱Cauchy网.由充分性条件知Y_n,Z_n,u_n,$Q(\mathbf{M}_n)$,$Q(\mathbf{M}_n^*)$,Pu_n,T_n,t_n和M_n都是收敛的(按范数或弱算子拓扑).

令

$$Y_n \longrightarrow Y, Z_n \longrightarrow Z, u_n \longrightarrow u,$$

$$Q(\mathbf{M}_n) \longrightarrow Q(\mathbf{M}), Q(\mathbf{M}_n^*) \longrightarrow Q(\mathbf{M}^*),$$

$$\mathrm{Pu_n} \longrightarrow \mathrm{Pu}(\text{按范数}), \mathrm{T_n} \longrightarrow \mathrm{T},$$

$$\mathrm{M_n} \longrightarrow \mathrm{M}(\text{按弱算子拓扑}), \mathrm{t_n} \longrightarrow \mathrm{t}(\text{数列收敛}).$$

所以算子网按弱算子拓扑的极限 A 属于 $C^1(\mathcal{U}, Q, R, D, P)$.

第五章
算子代数的 C^* - 等价性

本章考虑 Shulman 意义下一组一般对称算子代数的 C^* - 等价性问题，以及商代数的 C^* - 等价性，对称性与非对称性的理想，算子代数的交换性.

本章考虑的算子代数都是第四章 §4.5 节中的一组算子代数的相应情况，所得到的结论是关于这一组算子代数的结果. 即考虑下面 Shulman 意义下六类算子代数：

(1) 令$\mathcal{U}$是 Hilbert 空间 H 上的算子 $*$-代数，I_H 是 H 上的单位算子，并且 $I_H \notin \mathcal{U}$. 置

$$C^0(\mathcal{U}) = \left\{ \begin{pmatrix} tI_k & & \\ & tI_H + M & \\ & & tI_k \end{pmatrix} : t \in \mathbf{C}, \text{单位算子 } I_k \in M_k, M \in \mathcal{U} \right\}.$$

(2) 令$\mathcal{U}$是 Hilbert 空间 H 上的算子 $*$-代数，I_H 是 H 上的单位算子，并且 $I_H \notin \mathcal{U}$，$q_i: \mathcal{U} \longrightarrow H$，是线性映射，且满足：$q_i(AB) = Aq_i(B)$，$A, B \in \mathcal{U}$.

令 R_i 是 H 中对$\mathcal{U}$不变的子空间，R_i 直交于 $q_i(\mathcal{U})$，D_i 直交于 R_i，P_i 是共轭线性算子，且满足 $P_i^2 = I_{D_i}$，这里 I_{D_i} 是 D_i 上的单位算子，$i = 1, 2, \cdots, k$.

设

$$R = R_1 \times R_2 \times \cdots \times R_k,$$

$$Q = q_1 \times q_2 \times \cdots \times q_k,$$

$$P = P_1 \times P_2 \times \cdots \times P_k,$$

$$D = D_1 \times D_2 \times \cdots \times D_k,$$

$M \in \mathcal{U}$，$\mathbf{M} = M \times M \times \cdots \times M$($k$ 重积)，并且$\mathbf{M}^* = M^* \times M^* \times \cdots \times M^*$($k$ 重积)，置

$$C^1(\mathcal{U}, Q, R, D, P) = \left\{ \begin{pmatrix} tI_k & (Q(\mathbf{M}^*) + Y + Pu) \otimes \xi & T \\ & tI_H + M & \eta \otimes (Q(M) + Z + u) \\ & & tI_k \end{pmatrix} \right.$$

$$\left. t \in \mathbf{C}, I_k \in M_k \text{ 是单位矩阵}, T \in M_k, M \in \mathcal{U}, Y, Z \in R, u \in D \right\}.$$

(3) 令$\mathcal{U}$是 Hilbert 空间 H 上算子 $*$-代数，I_H 是 H 上的单位算子，$I_H \in \mathcal{U}$. 子空间 $R_i \in H$ 是$\mathcal{U}$的不变子空间，$R = R_1 \times R_2 \times \cdots \times R_k$. 置

$$C^{2a}(\mathcal{U}) = \left\{ \begin{pmatrix} \Lambda & & \\ & M & \\ & & \Lambda \end{pmatrix} : \Lambda \in M_k, M \in \mathcal{U} \right\};$$

$$C^{2b}(\mathcal{U},R)=\left\{\begin{pmatrix}\Lambda & Y\otimes\xi & T\\ & M & \eta\otimes Z\\ & & \Lambda\end{pmatrix}:\Lambda,T\in M_k,M\in\mathcal{U},Y,Z\in R\right\};$$

$$C^{3a}(\mathcal{U})=\left\{\begin{pmatrix}\Lambda & & \\ & M & \\ & & \Gamma\end{pmatrix}:\Lambda,\Gamma\in M_k,M\in\mathcal{U}\right\};$$

$$C^{3b}(\mathcal{U},R)=\left\{\begin{pmatrix}\Lambda & Y\otimes\xi & T\\ & M & \eta\otimes Z\\ & & \Gamma\end{pmatrix}:\Lambda,\Gamma,T\in M_k,M\in\mathcal{U},Y,Z\in R\right\};$$

$C^0(\mathcal{U})$，$C^1(\mathcal{U},Q,R,D,P)$，$C^{2a}(\mathcal{U})$，$C^{2b}(\mathcal{U},R)$，$C^{3a}(\mathcal{U})$，$C^{3b}(\mathcal{U},R)$ 分别是 Pontrjagin 空间$\prod_k$ 上第 0，Ⅰ，$Ⅱ_a$，$Ⅱ_b$，$Ⅲ_a$ 和 $Ⅲ_b$ 类的一般对称算子代数.

§5.1 算子代数 C* - 等价的条件与 C* - 等价的理想

本节讨论$\prod_k$ 空间上算子代数的 C* - 等价性问题. 证明第 0、Ⅱa 类算子代数是 C* - 等价的，其余各类算子代数不是 C* - 等价的.

一个 Banach* - 代数如果可以赋予一个等价的范数使之成为 C* - 代数，则称之为 C* - 等价的.

引理 5.1　[12]Banach* - 代数是 C* - 等价的，当且仅当对其中的任意元 a 由 $a^*a=0$ 可推出 $a=0$.

引理 5.2　[12]Banach* - 代数是 C* - 等价的，当且仅当由它的自伴元产生的所有 Banach* - 子代数都是 C* - 等价的.

定理 5.1　对$\prod_k$ 空间上一般 JC* - 代数下列结论成立：

(1) 第 0，和 $Ⅱ_a$ 类 JC* - 代数是 C* - 等价的.

(2) 第 Ⅰ、$Ⅱ_b$、$Ⅲ_a$ 和 $Ⅲ_b$ 类 JC* - 代数都不是 C* - 等价的.

证明　(1) 设$\mathcal{A}$是第 0 类 JC* - 代数，且 $A\in\mathcal{A}$，则有

$$A \doteq \begin{pmatrix} tI_k & & \\ & \lambda I_H + M & \\ & & tI_k \end{pmatrix},$$

$$A^{\#} = JA^* J = \begin{pmatrix} \bar{t}I_k & & \\ & \bar{\lambda}I_k + M^* & \\ & & \bar{t}I_k \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbf{C}, M \in \mathcal{U}.$$

在正规分解$\prod_k = (Z \oplus H) + Z^*$ 中,因 Z, Z^* 与 H 按正定内积$(\cdot,\cdot)$是互相直交,再根据$\mathcal{A}$上的算子范数与$\mathcal{A}$作为相应 Hilbert 空间上的算子范数是相等的,因此$\mathcal{A}$按"* 对合运算,"从而按"# 对合运算"是 C^* - 等价的.

若$\mathcal{A}$是第 II_a 类的 JC^* - 代数,且 $A \in \mathcal{A}$,则 $A^* = A^{\#}$. 与前面证明类似知$\mathcal{A}$是 C^* - 等价的.

(2) Ⅰ、II_b 和 III_b 三种情况是相似的,只就 II_b 类 JC^* - 代数加以证明. 设$\mathcal{A}$是第 III_b 类 JC^* - 代数中的元,并且

$$\mathcal{A} = \left\{ \begin{pmatrix} \Lambda & Y \otimes \xi & T \\ & M & \eta \otimes Z \\ & & \Gamma \end{pmatrix} : \Lambda, \Gamma, T \in M_k, M \in \mathcal{U}, Y, Z \in R \right\},$$

则

$$A^{\#} = JA^* J = \begin{pmatrix} \Gamma^* & Z \otimes \xi & T^* \\ & M^* & \eta \otimes Y \\ & & \Lambda^* \end{pmatrix}.$$

于是

$$A^{\#} A = \begin{pmatrix} \Gamma^{\#} \Lambda & (\Gamma Y + M^* Z) \otimes \xi & \Gamma^* T + (Z, Z) + T^* \Gamma \\ & M^* M & \eta \otimes (M^* Z + \Gamma Y) \\ & & \Lambda^* \Gamma \end{pmatrix}.$$

所以,由 $A^{\#} A = 0$,不能推出 $T = 0$,从而不能推出 $A = 0$. 再由引理 5.1 知该代数不是 C^* - 等价的.

现在来说明第 III_a 类代数不是 C^* - 等价的. 取 III_a 类代数中的自伴元

$$A=\begin{pmatrix} ir & & \\ & M & \\ & & -ir \end{pmatrix},$$

这里 $r^*=r, M^*=M, M\in\mathcal{U}$，则由 A 产生的子代数不是 C* - 等价的. 由引理 5.2 知第 III_a 类代数不是 C* - 等价的.

§ 5.2 理想的对称性

本节讨论 $\prod_1$ 空间上一般对称算子代数理想的对称性问题. 指出该代数的若干对称理想和非对称理想. 这些结果在讨论商代数的 C* - 等价性问题时将用到.

C* - 代数的理想都是对称的，但对 JC* - 代数来说这一结论一般不再成立. 我们有下面的结果.

引理 5.3　$\prod_1$ 空间上 JC* - 代数的理想有下列一些类型：

(1)

$$\mathcal{M}_{01}=\left\{\begin{pmatrix} \lambda & & \\ & \lambda I_H+M & \\ & & \lambda \end{pmatrix}: \lambda\in\mathbf{C}, M\in\mathcal{U}_0\right\};$$

$$\mathcal{M}_{02}=\left\{\begin{pmatrix} 0 & & \\ & M & \\ & & 0 \end{pmatrix}: M\in\mathcal{U}_0\right\};$$

(2)

$$\mathcal{M}_{11}=\left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 & t \\ & M & 0 \\ & & 0 \end{pmatrix}: t\in\mathbf{C}, M\in\mathcal{U}_0\right\};$$

$$\mathcal{M}_{12}=\left\{\begin{pmatrix} 0 & y\otimes\xi & t \\ & M & \eta\otimes z \\ & & 0 \end{pmatrix}: t\in\mathbf{C}, M\in\mathcal{U}_0, y,z\in R(q(M),D)\right\};$$

(3)

$$\mathcal{M}_{21}^{a}=\left\{\begin{pmatrix}0 & & \\ & M & \\ & & 0\end{pmatrix}:M\in\mathcal{U}_0\right\};$$

$$\mathcal{M}_{22}^{a}=\left\{\begin{pmatrix}\lambda & & \\ & M & \\ & & \lambda\end{pmatrix}:\lambda\in\mathbf{C},M\in\mathcal{U}_0\right\};$$

(4)

$$\mathcal{M}_{21}^{b}=\mathcal{M}_{11},\mathcal{M}_{22}^{b}=\mathcal{M}_{12};$$

$$\mathcal{M}_{23}^{b}=\left\{\begin{pmatrix}\lambda & y\otimes\xi & t \\ & M & \eta\otimes z \\ & & \lambda\end{pmatrix}:\lambda,t\in\mathbf{C},M\in\mathcal{U}_0,y,z\in R\right\};$$

(5)

$$\mathcal{M}_{31}^{a}=\mathcal{M}_{21}^{a};$$

$$\mathcal{M}_{32}^{a}=\left\{\begin{pmatrix}\lambda & & \\ & M & \\ & & \mu\end{pmatrix}:\lambda,\mu\in\mathbf{C},M\in\mathcal{U}_0\right\}$$

$$\mathcal{M}_{33}^{a}=\left\{\begin{pmatrix}\lambda & & \\ & M & \\ & & 0\end{pmatrix}:\lambda\in\mathbf{C},M\in\mathcal{U}_0\right\};$$

$$\mathcal{M}_{34}^{a}=\left\{\begin{pmatrix}0 & & \\ & M & \\ & & \mu\end{pmatrix}:\mu\in\mathbf{C},M\in\mathcal{U}_0\right\};$$

(6)

$$\mathcal{M}_{31}^{b}=\mathcal{M}_{11};\mathcal{M}_{32}^{b}=\mathcal{M}_{12};\mathcal{M}_{33}^{b}=\mathcal{M}_{23};$$

$$\mathcal{M}_{34}^{b}=\left\{\begin{pmatrix}\lambda & & \\ & M & \\ & & \mu\end{pmatrix}:\lambda,\mu\in\mathbf{C},M\in\mathcal{U}_0\right\};$$

$$\mathcal{M}_{35}^{b}=\left\{\begin{pmatrix}\lambda & y\otimes\xi & t \\ & M & \eta\otimes z \\ & & 0\end{pmatrix}:\lambda,t\in\mathbf{C},M\in\mathcal{U}_0,y,z\in R\right\};$$

$$\mathcal{M}_{36}^{b}=\left\{\begin{pmatrix}0 & y\otimes\xi & t \\ & M & \eta\otimes z \\ & & \mu\end{pmatrix}:\mu,t\in\mathbf{C},M\in\mathcal{U}_0,y,z\in R\right\}.$$

其中$\mathcal{U}_0$是$\mathcal{U}$的理想，并且$\mathcal{M}_{33}^{a}$，$\mathcal{M}_{34}^{a}$，$\mathcal{M}_{35}^{b}$与$\mathcal{M}_{36}^{b}$四类理想是非对称的，其余理想都是对称的.

证明　$\mathcal{M}_{33}^{a}$，$\mathcal{M}_{34}^{a}$，$\mathcal{M}_{35}^{b}$与$\mathcal{M}_{36}^{b}$非对称的证明是相似的，只就$\mathcal{M}_{35}^{b}$来证明. 令

$$A=\begin{pmatrix}\lambda & y\otimes\xi & t \\ & M & \eta\otimes z \\ & & 0\end{pmatrix},$$

则

$$A^{\#}=JA^{*}J=\begin{pmatrix}0 & z\otimes\xi & \bar{t} \\ & M^{*} & \eta\otimes y \\ & & \bar{\lambda}\end{pmatrix}\overline{\in}\mathcal{M}_{34}^{b}.$$

所以$\mathcal{M}_{35}^{b}$不是对称的.

第 I 类 JC*-代数中型如

$$\begin{pmatrix}0 & q(M^{*})\otimes\xi & 0 \\ & M & \eta\otimes q(M) \\ & & 0\end{pmatrix}$$

与

$$\begin{pmatrix} 0 & Pu \otimes \xi & 0 \\ & M & \eta \otimes u \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

算子的"#"共轭算子分别为

$$\begin{pmatrix} 0 & q(M) \otimes \xi & 0 \\ & M^* & \eta \otimes q(M^*) \\ & & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & q(M^{**}) \otimes \xi & 0 \\ & M^* & \eta \otimes q(M^*) \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

与

$$\begin{pmatrix} 0 & u \otimes \xi & 0 \\ & M & \eta \otimes Tu \\ & & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & P(Pu) \otimes \xi & 0 \\ & M & \eta \otimes Tu \\ & & 0 \end{pmatrix}.$$

其他情况的验证是类似的.所以除了$\mathcal{M}_{33}^a$,$\mathcal{M}_{34}^a$,$\mathcal{M}_{35}^b$与$\mathcal{M}_{36}^b$四类理想外,其余理想都是对称的.

注:引理 5.3 是第二章引理 2.1 的特例.这些结果在讨论商代数的 C*-等价性问题时将用到.

定理 5.2 对$\prod_1$空间上的 JC*-代数,下列结论成立:

(1) 第 0、Ⅰ、Ⅱ$_a$ 和 Ⅱ$_b$ 类 JC*-代数的理想都是对称的.

(2) 第 Ⅲ$_a$ 类 JC*-代数中只有 M_{33}^a 与 M_{34}^a 两类理想是非对称的.

(3) 第 Ⅲ$_b$ 类 JC*-代数中只有 M_{35}^b 与 M_{36}^b 两类理想是非对称的.

证明 由引理 5.3 立得.

§ 5.3 商代数

本节给出$\prod_1$空间上一般对称算子代数关于某些理想的商代数的 C*-等价性结果.

在通常的 C*-代数中,C*-代数关于理想的商仍是 C*-代数.但在 JC*-代数中,这一结

论一般不再成立. 但有下面的结论.

定理 5.3　对 $\prod_1$ 空间上的 JC^*-代数下列结论成立：

(1) 第 0 和 II_a 类 JC^*-代数关于它们理想的商是 C^*-等价的.

(2) 第 I 类 JC^*-代数模去 $\mathcal{M}_{12}$ 型理想的商是 C^*-等价的.

(3) 第 II_b 类 JC^*-代数模去 $\mathcal{M}_{22}^b$ 或 $\mathcal{M}_{23}^b$ 型理想的商是 C^*-等价的.

(4) 第 III_a 类 JC^*-代数关于 $\mathcal{M}_{33}^a$, $\mathcal{M}_{34}^a$ 型理想的商是 C^*-等价的.

(5) 第 III_b 类 JC^*-代数模去 $\mathcal{M}_{35}^b$, $\mathcal{M}_{36}^b$ 型理想的商是 C^*-等价的.

证明　由引理 5.1、引理 5.2 及引理 5.3 便得.

§5.4 交换性条件

本节给出具有 Shulman 形式的六类一般对称算子代数成为交换算子代数的等价条件. 特别指出, 第 III_b 类算子代数不可能成为交换代数.

定理 5.4　对 $\prod_k$ 空间上一般算子代数下列结论成立：

(1) 第 0 类算子代数 $C^0(\mathcal{U})$ 是交换的, 当且仅当 $\mathcal{U}$ 是可交换的.

(2) 第 II_a(或 III_a) 类算子代数 $C^{2a}(\mathcal{U})$(或 $C^{3a}(\mathcal{U})$) 是交换的, 当且仅当 $\mathcal{U}$ 和 M_k 是交换的.

(3) 第 I 类算子代数 $C^1(\mathcal{U}, Q, R, D, P)$ 是交换的, 当且仅当 $\mathcal{U}$ 是可交换的, $R=0$, P 是酉算子, Q 是共轭 $*$-对称的, 即对任意的 $M_1, M_2 \in \mathcal{U}$ 有

$$(Q(M_2), Q(M_1^*)) = (Q(M_1), Q(M_2^*)).$$

(4) 第 II_b 类算子代数 $C^{2b}(\mathcal{U}, R)$ 是交换的, 当且仅当 $\mathcal{U}$ 是交换的, $R=0$.

(5) 第 III_b 类算子代数 $C^{3b}(\mathcal{U}, R)$ 不可能是交换的.

证明　(1) 与(2) 直接验证即得.

(3) 必要性: 设 $A_1, A_2 \in \mathbf{C}^1(\mathcal{U}, Q, R, D, P)$ 且

$$A_1 = \begin{pmatrix} t_1 I_k & (Q(M_1^*) + Y_1 + Pu_1) \otimes \xi & T_1 \\ & t_1 I^H + M_1 & \eta \otimes (Q(M_1) + Z_1 + u_1) \\ & & t_1 I_k \end{pmatrix},$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} t_2 I_k & (Q(M_2^*) + Y_2 + Pu_2) \otimes \xi & T_2 \\ & t_2 I^H + M_2 & \eta \otimes (Q(M_2) + Z_2 + u_2) \\ & & t_2 I_k \end{pmatrix},$$

则

$$A_1 A_2 = \begin{pmatrix} t_1 t_2 I_k & a_{12} & a_{13} \\ & a_{22} & a_{23} \\ & & t_1 t_2 I_k \end{pmatrix},$$

其中

$$a_{12} = [\overline{t_1}(Q(M_2^*) + Y_2 + Pu_2) + (\overline{t_2} I_H + M_2^*)(Q(M_1^*) + Y_1 + Pu_1)] \otimes \xi,$$

$$a_{13} = t_1 T_2 + (Q(M_2) + Z_2 + u_2, Q(M_1) + Y_1 + Pu_1) \cdot (\xi \otimes \eta) + t_2 T_1,$$

$$a_{22} = t_1 t_2 I_H + t_1 M_2 + t_2 M_1 + M_1 M_2,$$

$$a_{23} = \eta \otimes [(t_1 I_H + M_1)(Q(M_2) + Z_2 + u_2) + t_2 (Q(M_1) + Z_1 + u_1)],$$

而

$$A_2 A_1 = \begin{pmatrix} t_1 t_2 I_k & b_{12} & b_{13} \\ & b_{22} & b_{23} \\ & & t_1 t_2 I_k \end{pmatrix},$$

其中

$$b_{12} = [\overline{t_2}(Q(M_1^*) + Y_1 + Pu_1) + (\overline{t_1} I_H + M_1^*)(Q(M_2^*) + Y_2 + Pu_2)] \otimes \xi,$$

$$b_{13} = t_2 T_1 + (Q(M_1) + Z_1 + u_1, Q(M_2) + Y_2 + Pu_2) \cdot (\xi \otimes \eta) + t_1 T_2,$$

$$b_{22} = t_1 t_2 I_H + t_1 M_2 + t_2 M_1 + M_2 M_1,$$

$$b_{23} = \eta \otimes [(t_2 I_H + M_2)(Q(M_1) + Z_1 + u_1) + t_1 (Q(M_2) + Z_2 + u_2)].$$

由条件 $A_1 A_2 = A_2 A_1$，经过比较可得 $M_1 M_2 = M_2 M_1$，所以 $\mathcal{U}$ 是可交换的. 在算子 A_1 中，令 $M_1 = 0, u_1 = 0$，且在 A_2 中，令 $M_2 = 0, u_2 = 0$，则

$$A_1 A_2 = \begin{pmatrix} t_1 t_2 I_k & (\overline{t_1} Y_2 + \overline{t_2} Y_1) \otimes \xi & t_1 T_2 + (Z_2, Y_1) \cdot (\xi \otimes \eta) + t_2 T_1 \\ & t_1 t_2 I_H & \eta \otimes (t_1 Z_2 + t_2 Z_1) \\ & & t_1 t_2 I_k \end{pmatrix},$$

$$A_2A_1=\begin{pmatrix} t_1t_2I_k & (\overline{t_2}Y_1+\overline{t_1}Y_2)\otimes\xi & t_2T_1+(Z_1,Y_2)\cdot(\xi\otimes\eta)+t_1T_2 \\ & t_1t_2I_H & \eta\otimes(t_2Z_1+t_1Z_2) \\ & & t_1t_2I_k \end{pmatrix},$$

由条件 $A_1A_2=A_2A_1$，经过比较可得，对任意的 $Y_1,Y_2,Z_1,Z_2\in R$ 有

$$(Z_2,Y_1)\cdot(\xi\otimes\eta)=(Z_1,Y_2)\cdot(\xi\otimes\eta).$$

而 ξ 与 η 成偶对，于是 $(Z_2,Y_1)=(Z_1,Y_2)$ 对任意的 $Y_1,Y_2,Z_1,Z_2\in R$ 成立. 所以 $R=0$.

在算子 A_1 中，令 $M_1=0,Y_1=0$，在 A_2 中，令 $M_2=0,Z_2=0$，则

$$A_1A_2=\begin{pmatrix} t_1t_2I_k & (\overline{t_1}Vu_2+\overline{t_2}Pu_1)\otimes\xi & t_1T_2+(u_2,Pu_1)\cdot(\xi\otimes\eta)+t_2T_1 \\ & t_1t_2I_H & \eta\otimes(t_1u_2+t_2u_1) \\ & & t_1t_2I_k \end{pmatrix},$$

$$A_2A_1=\begin{pmatrix} t_1t_2I_k & (\overline{t_2}Vu_1+\overline{t_1}Pu_2)\otimes\xi & t_2T_1+(u_1,Pu_2)\cdot(\xi\otimes\eta)+t_1T_2 \\ & t_1t_2I_H & \eta\otimes(t_2u_1+t_1u_2) \\ & & t_1t_2I_k \end{pmatrix},$$

由 $A_1A_2=A_2A_1$，经过比较可得，对任意的 $u_1,u_2\in D$ 有

$$(u_2,Pu_1)=(u_1,Pu_2).$$

所以 P 在 D 上是酉算子. 在算子 A_1 中，令 $Y_1=0,u_1=0$，且在 A_2 中，令 $Y_2=0,u_2=0$，则

$$A_1A_2=\begin{pmatrix} t_1t_2I_k & [\overline{t_1}Q(M_2^*)+(\overline{t_2}I_H+M_2^*)Q(M_1^*)]\otimes\xi & t_1T_2+(Q(M_2),Q(M_1^*))\cdot(\xi\otimes\eta)+t_2T_1 \\ & t_1t_2I_H & \eta\otimes[(t_1I_H+M_1)Q(M_2)+t_2Q(M_1)] \\ & & t_1t_2I_k \end{pmatrix},$$

$$A_2A_1=\begin{pmatrix} t_1t_2I_k & [\overline{t_2}Q(M_1^*)+(\overline{t_1}I_H+M_1^*)Q(M_2^*)]\otimes\xi & t_2T_1+(Q(M_1),Q(M_2^*))\cdot(\xi\otimes\eta)+t_1T_2 \\ & t_1t_2I_H & \eta\otimes[(t_2I_H+M_2)Q(M_1)+t_1Q(M_2)] \\ & & t_1t_2I_k \end{pmatrix},$$

同样由 $A_1A_2=A_2A_1$，经过比较可得，对任意的 $M_1,M_2\in U$ 有

$$(Q(M_2),Q(M_1^*))=(Q(M_1),Q(M_2^*)).$$

即 Q 是共轭 $*$ - 对称的.

充分性:经过直接计算,并注意 Q 的值域,R 及 D 三部分是相互直交,便知 $C^1(\mathscr{U},Q,R,D,P)$ 是可交换的.

(4) 的证明蕴含在(3) 的证明之中.

(5) 设 $B_1,B_2 \in \mathbf{C}^{3b}(\mathscr{U},)$ 并且

$$B_1 = \begin{pmatrix} \Lambda_1 & Y_1 \otimes \xi & T_1 \\ & M_1 & \eta \otimes Z_1 \\ & & \Gamma_1 \end{pmatrix},$$

$$B_1 = \begin{pmatrix} \Lambda_2 & Y_2 \otimes \xi & T_2 \\ & M_2 & \eta \otimes Z_2 \\ & & \Gamma_2 \end{pmatrix},$$

则

$$B_1B_2 = \begin{pmatrix} \Lambda_1\Lambda_2 & (\Lambda_1^* Y_2 + M_2^* Y_1) \otimes \xi & \Lambda_1 T_2 + (Z_2,Y_1)\cdot(\xi \otimes \eta) + T_1\Gamma_2 \\ & M_1M_2 & \eta \otimes (M_1Z_2 + \Gamma_2 T_1) \\ & & \Gamma_1\Gamma_2 \end{pmatrix},$$

$$B_2B_1 = \begin{pmatrix} \Lambda_2\Lambda_1 & (\Lambda_2^* Y_1 + M_1^* Y_2) \otimes \xi & \Lambda_2 T_1 + (Z_1,Y_2)\cdot(\xi \otimes \eta) + T_2\Gamma_1 \\ & M_1M_2 & \eta \otimes (M_2Z_1 + \Gamma_1 T_2) \\ & & \Gamma_2\Gamma_1 \end{pmatrix}.$$

经过比较知,要使 $B_1B_2 = B_2B_1$,只有当 $Y_1 = Y_2 = Z_1 = Z_2 = 0, T_1 = T_2 = 0$ 时,$B_1,B_2 \in \mathbf{C}^{3b}(\mathscr{U},)$.

定理 5.5 JC* - 代数 $C^1(\mathscr{U},Q,R,D,P)$ 是可交换的,当且仅当 $\mathscr{U}$ 是可交换的,且 $R = 0$,P 是酉算子.

证明 由定理 5.4 的证明知,只需证明对交换 C* - 代数 $\mathscr{U}$ 成立:

$$(Q(M_1{}^*),Q(M_2)) = (Q(M_2{}^*),Q(M_1)), M_1,M_2 \in \mathscr{U}.$$

事实上,由 $\mathscr{U}$ 是 C* - 代数知 $\mathscr{U}$ 中存在逼近单位元 E_n,于是对 $M_1,M_2 \in \mathscr{U}$ 有

$$
\begin{aligned}
(Q(M_1^*),Q(M_2)) &= \lim(E_nQ(M_1^*),Q(M_2)) \\
&= \lim(Q(E_nM_1^*),Q(M_2)) = \lim(Q(M_1^*E_n),Q(M_2)) \\
&= \lim(M_1^*(QE_n),Q((M_2)) = \lim(Q(E_n),M_1Q(M_2)) \\
&= \lim(Q(E_n),Q(M_1M_2)) = \lim(Q(E_n),Q(M_2M_1)) \\
&= \lim(Q(E_n),M_2Q(M_1)) = \lim(M_2^*Q(E_n),Q(M_1)) \\
&= \lim(Q(M_2^*E_n),Q(M_1)) = \lim(E_nQ(M_2^*),Q(M_1)) \\
&= (Q(M_2^*),Q(M_1)).
\end{aligned}
$$

推论 1　对$\prod_1$空间上 JC* - 代数下列结论成立.

(1) 第 0、II_a 与 III_a 类 JC* - 代数是交换的等价条件是$\mathcal{U}$可交换.

(2) 第 Ⅰ 类 JC* - 代数是交换的等价于$\mathcal{U}$是可交换的,且 $R=0$,$P^*=P$.

(3) 第 II_b 类 JC* - 代数是交换的等价于$\mathcal{U}$是可交换的,且 $R=0$.

(4) 第 III_b 类 JC* - 代数不可能是交换的.

推论 2　设$\mathcal{U}$是 Hilbert 空间 H 上 C* - 代数,q 是$\mathcal{U}$到 H 的拟向量,则对任意 $M_1,M_2\in\mathcal{U}$有$(q(M_1^*),q(M_2))=(q(M_2^*),q(M_1))$.

第六章

算子代数的导子与不变子空间

本章首先提出算子代数内导子是一个酉等价不变的概念，借此给出Π_k空间上非退化JVN-代数的导子是内的等价条件. 对Π_1空间上一般算子代数说明了第0、II_a和III_a类JVN-代数的导子必是内的. 通过例子说明第Ⅰ、II_b和III_b类JVN-代数的导子一般不是内的. 最后讨论算子代数的不变子空间问题.

§ 6.1 内导子的等价条件

本节说明算子代数上的内导子是一个酉等价不变的概念.在此基础上利用定理 1.11 给出了$\prod_k$空间上非退化 JVN- 代数的导子为内的等价条件是导子在该代数的奇异部分上的限制为零.

算子代数$\mathcal{A}$上的一个线性映射δ称为是$\mathcal{A}$的导子,如果对任意$A,B\in\mathcal{A}$,有$\delta(AB)=\delta(A)B+A\delta(B)$;称$\delta$是内的,如果存在一个$A_0\in\mathcal{A}$,使得对任意$B\in\mathcal{A}$,有$\delta(B)=A_0B-BA_0$.

引理 6.1 算子代数上的内导子是酉等价不变的,即若$\mathcal{A}$与$\mathcal{B}$是$\prod_k$空间上酉等价的两个算子代数,且$U\mathcal{A}U^{-1}=\mathcal{B}$.$U$是$\prod_k$上的酉算子,$\delta$是$\mathcal{A}$上的内导子,则

$$\delta':\mathcal{B}\longrightarrow\mathcal{B},B\in\mathcal{B},B=UAU^{-1},$$

$$\delta'(B)=U\delta(A)U^{-1},$$

是$\mathcal{B}$上的内导子.

证明 由内导子的定义直接验证即得.

定理 6.1 Pontrjagin 空间$\prod_k$上非退化的 JVN- 代数$\mathcal{A}$的导子δ是内的充要条件是δ在$\mathcal{A}$的奇异部分上的限制为零.

证明 由定理 1.11 和引理 6.1 可设

$$\mathcal{A}=W^*\oplus B(\prod_l)^{(n)}\oplus B(H)^{(r,m)},$$

其中W^*是某个具体的W^*- 代数,$B(\prod_l)^{(n)}$是指标为$l(l>0)$的$\prod_k$型空间上算子代数$B(\prod_l)$的n次直和,而

$$B(H)^{(r,m)}=\{A^{(r)}\oplus(T^*AT)^{(m)}\mid A\in B(H),T^*T=-I\}.$$

由于W^*和$B(\prod_l)$都是 Von Neumann 代数,因此其上的导子必是内的.

下面来说明$\mathcal{A}$上的导子δ在W^*、$B(\prod_l)^{(n)}$及$B(H)^{(r,m)}$三部分上的限制满足下面的条件:

$$\delta_{|W^*}W^*\subseteq W^*,$$

$$\delta_{|B(\prod_l)^{(n)}} B(\prod_l)^{(n)} \subseteq B(\prod_l)^{(n)},$$

$$\delta_{|B(H)^{(r,m)}} B(H)^{(r,m)} \subseteq B(H)^{(r,m)}.$$

不失一般性,设 $n = m = r = 1$,即

$$\mathcal{A} = W^* \oplus B(\prod_l) \oplus B(H)^{(1,1)}.$$

由于 W^*、$B(\prod_l)$ 及 $B(H)$ 都是 C^*-代数,因此都有有界逼近单位元.再根据一般 Banach 代数理论,便知这三个代数中的每个元可以分解为该代数中两个元的乘积.于是对任意

$$X = \begin{pmatrix} x & & \\ & y & \\ & & z \end{pmatrix} \in \mathcal{A},$$

存在 $x_1, x_2 \in W^*$;$y_1, y_2 \in B(\prod_l)$;$z_1, z_2 \in B(H)^{(1,1)}$,使得

$$X = \begin{pmatrix} x_1 x_2 & & \\ & y_1 y_2 & \\ & & z_1 z_2 \end{pmatrix}.$$

设

$$X_1 = \begin{pmatrix} x_1 & & \\ & y_1 & \\ & & z_1 \end{pmatrix},$$

$$X_2 = \begin{pmatrix} x_2 & & \\ & y_2 & \\ & & z_2 \end{pmatrix},$$

则 $X_1, X_2 \in \mathcal{A}$,且有 $X = X_1 X_2$.

现在考虑 δ 在 W^* 上的限制.设

$$X^{(1)} = \begin{pmatrix} x & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix}, x \in W^*,$$

则有

$$X_1^{(1)} = \begin{pmatrix} x_1 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix}, X_2^{(1)} = \begin{pmatrix} x_2 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix},$$

且有 $X^{(1)} = X_1^{(1)} X_2^{(1)}$. 再设

$$\delta X^{(1)} = \begin{pmatrix} x' & & \\ & y' & \\ & & z' \end{pmatrix},$$

$$\delta X_1^{(1)} = \begin{pmatrix} a & & \\ & b & \\ & & c \end{pmatrix},$$

$$\delta X_2^{(1)} = \begin{pmatrix} e & & \\ & f & \\ & & g \end{pmatrix}.$$

则由导子的定义有

$$\begin{aligned} \delta X^{(1)} &= \delta(X_1^{(1)} X_2^{(1)}) \\ &= \delta(X_1^{(1)}) X_2^{(1)} + X_1^{(1)} \delta(X_2^{(1)}) \\ &= \begin{pmatrix} a & & \\ & b & \\ & & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & & \\ & f & \\ & & g \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} ax_2 + x_1 e & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

所以 $y' = 0, z' = 0$, 且 $x' = ax_2 + x_1 e$. 即有 $\delta_{|W^*} W^* \subseteq W^*$. 同时也说明了 $\delta_{|W^*}$ 是 W^* 上的导子.

同理可证

$$\delta_{|B(\prod_l)} B(\prod_l) \subseteq B(\prod_l),$$

$$\delta_{|B(H)^{(1,1)}} B(H)^{(1,1)} \subseteq B(H)^{(1,1)},$$

并且 $\delta_{|B(\prod_l)}$ 与 $\delta_{|B(H)^{(1,1)}}$ 分别是 $B(\prod_l)$ 与 $B(H)^{(1,1)}$ 上的导子. 因此 $\mathcal{A}$ 上的导子 δ 是内的等价于 δ 在 $B(H)^{(r,m)}$ 上的限制是 $B(H)^{(r,m)}$ 上的内导子.

不妨就 $m=r=1$ 的情况来证明. 即考虑 $B(H)^{(1,1)}$ 上的导子. 充分性是显然的. 现在设 δ 是 $B(H)^{(1,1)}$ 上的内导子，则存在 $A_0 \in B(H)$，使得对任意 $A \in B(H)$ 有

$$\begin{aligned}
&\delta\begin{pmatrix} A & \\ & T^*AT \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} A_0 & \\ & T^*A_0T \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & \\ & T^*AT \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} A & \\ & T^*AT \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_0 & \\ & T^*A_0T \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} A_0A - AA_0 & \\ & T^*A_0TT^*AT - T^*ATT^*A_0T \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} A_0A - AA_0 & \\ & T^*(-A_0A + AA_0)T \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

由 $\delta\begin{pmatrix} A & \\ & T^*AT \end{pmatrix} \in B(H)^{(1,1)}$ 知

$$A_0A - AA_0 = -A_0A + AA_0.$$

即有 $A_0A = AA_0$，而 A 是 $B(H)$ 中任意算子，所以，$A_0 = \alpha I$，α 为数. 从而对任意 $A \in B(H)$，有

$$\delta_{|B(H)}(A) = A_0A - AA_0 = 0$$

及

$$\delta_{|T^*B(H)T}(T^*AT) = T^*(-A_0A + AA_0)T = 0.$$

于是在 $B(H)^{(1,1)}$ 上 $\delta = 0$，从而定理得证.

§ 6.2 导子的若干例子

本节讨论 $\prod_1$ 空间上对称算子代数的导子问题. 给出 $\prod_1$ 空间上对称算子代数导子是内

导子的条件.

定理 6.2 设$\mathcal{A}$是$\prod_1$空间上的对称算子代数，δ是$\mathcal{A}$上的导子，则下列结论成立：

(1) 若$\mathcal{A}$是第0、II_a、III_a类的，则δ是内的充要条件是δ作为$\mathcal{U}$上的导子是内的.

(2) 若$\mathcal{A}$是第0、II_a、III_a类的 JVN- 代数，则δ必是内的.

证明 (1) 第0、II_a和III_a类的情况证明是相似的，这里只就第III_a类情况加以证明. 若$\mathcal{A}$上的导子δ是内的，则存在

$$A_0 = \begin{pmatrix} \lambda_0 & & \\ & B_0 & \\ & & \mu_0 \end{pmatrix}, \lambda_0, \mu_0 \in \mathbf{C}, B_0 \in \mathcal{U},$$

使得对

$$X = \begin{pmatrix} \lambda & & \\ & B & \\ & & \mu \end{pmatrix}, \lambda, \mu \in \mathbf{C}, B \in \mathcal{U},$$

有

$$\delta X = \begin{pmatrix} \lambda_0 & & \\ & B_0 & \\ & & \mu_0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda & & \\ & B & \\ & & \mu \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & & \\ & B & \\ & & \mu \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_0 & & \\ & B_0 & \\ & & \mu_0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & & \\ & B_0B - BB_0 & \\ & & 0 \end{pmatrix},$$

所以δ在$\mathcal{U}$上的限制是$\mathcal{U}$上的内导子.

反之，若δ作为$\mathcal{U}$上的导子是内的，则存在$B_0 \in \mathcal{U}$，使对$B \in \mathcal{U}$，有

$$\delta_{|\mathcal{U}}(B) = B_0B - BB_0.$$

由δ是$\mathcal{A}$上的导子知，δ满足：

$$\delta X = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & \delta_{|u}(B) & \\ & & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & B_0B - BB_0 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

任取 $\lambda_0, \mu_0 \in \mathbf{C}$. 令 $A_0 = \begin{pmatrix} \lambda_0 & & \\ & B_0 & \\ & & \mu_0 \end{pmatrix}$,则

$$A_0 X - X A_0 = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & B_0 B - B B_0 & \\ & & 0 \end{pmatrix} = \delta X.$$

所以 δ 是 $\mathcal{A}$ 上的内导子.

(2)若 $\mathcal{A}$ 是第0、II_a 和 III_a 类的JVN-代数,则 $\mathcal{U}$ 是Hilbert空间H上的Von Neumann代数,从而 $\mathcal{U}$ 上的导子是内的,再由(1)便知结论成立.

§6.3 各类代数导子的情况

下面通过构造例子说明 $\prod_1$ 空间上一般的第 I、II_b 和 III_b 类JVN-代数的导子未必是内的.

例 6.1　取空间

$$\prod\nolimits_1 = span\{e_+, e_-\},$$

其中

$$(e_+, e_+) = -(e_-, e_-) = 1, (e_+, e_-) = 0.$$

令

$$z = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_+ + e_-), z^* = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_+ - e_-).$$

记 $Z = span\{z\}, Z^* = span\{z^*\}$. 相应于直和分解

$$\prod\nolimits_1 = Z \oplus Z^*,$$

作 $\prod_1$ 上的JVN-代数

$$\mathcal{A} = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ & \lambda \end{pmatrix} : \lambda, \mu \in \mathbf{C} \right\}.$$

显然 Z 是$\mathcal{A}$的零性不变子空间，即$\mathcal{A}$是$\prod_1$ 上的一般的 JVN- 代数.

作$\mathcal{A}$上的线性映射

$$\delta\begin{pmatrix}\lambda & \mu \\ & \lambda\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 2\mu \\ & 0\end{pmatrix}, \lambda, \mu \in \mathbf{C}.$$

则对

$$X_1 = \begin{pmatrix}\lambda_1 & \mu_1 \\ & \lambda_1\end{pmatrix}, X_2 = \begin{pmatrix}\lambda_2 & \mu_2 \\ & \lambda_2\end{pmatrix} \in \mathcal{A},$$

由

$$\delta(X_1 X_2) = \delta\begin{pmatrix}\lambda_1\lambda_2 & \lambda_1\mu_2 + \lambda_2\mu_1 \\ & \lambda_1\lambda_2\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}0 & 2(\lambda_1\mu_2 + \lambda_2\mu_1) \\ & 0\end{pmatrix},$$

及

$$\left(\delta\begin{pmatrix}\lambda_1 & \mu_1 \\ & \lambda_1\end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix}\lambda_2 & \mu_2 \\ & \lambda_2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\lambda_1 & \mu_1 \\ & \lambda_1\end{pmatrix}\left(\delta\begin{pmatrix}\lambda_2 & \mu_2 \\ & \lambda_2\end{pmatrix}\right)$$

$$= \begin{pmatrix}0 & 2\mu_1 \\ & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_2 & \mu_2 \\ & \lambda_2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\lambda_1 & \mu_1 \\ & \lambda_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 2\mu_2 \\ & 0\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}0 & 2(\lambda_1\mu_2 + \lambda_2\mu_1) \\ & 0\end{pmatrix},$$

知 δ 确实是$\mathcal{A}$上的导子. 但 δ 不是内的.

事实上，若存在 $A_0 = \begin{pmatrix}\lambda_0 & \mu_0 \\ & \lambda_0\end{pmatrix} \in \mathcal{A}$，使对 $X = \begin{pmatrix}\lambda & \mu \\ & \lambda\end{pmatrix} \in \mathcal{A}$，成立 $\delta_{A_0} X = \delta X$. 则有

$$\begin{pmatrix}\lambda_0 & \mu_0 \\ & \lambda_0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda & \mu \\ & \lambda\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\lambda & \mu \\ & \lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_0 & \mu_0 \\ & \lambda_0\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda_0\lambda & \lambda_0\mu + \lambda\mu_0 \\ & \lambda_0\lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda_0\lambda & \lambda\mu_0 + \lambda_0\mu \\ & \lambda_0\lambda \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ & 0 \end{pmatrix}.$$

此为矛盾.

例 6.2　取$\prod_1$空间上相对于正规分解

$$\prod\nolimits_1 = (Z \oplus H) + Z^*$$

的第 Ⅰ 类算子代数

$$\mathcal{A} = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda & & t \\ & C & \\ & & \lambda \end{pmatrix} : \lambda, t \in \mathbf{C} \right\},$$

其中 C 是 Hilbert 空间 H 上的有界线性算子. 作$\mathcal{A}$上的线性映射

$$\delta \begin{pmatrix} \lambda & & t \\ & C & \\ & & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & & 2t \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix}.$$

则不难验证 δ 是$\mathcal{A}$上的导子. 若 δ 是$\mathcal{A}$上的内导子,则存在

$$A_0 = \begin{pmatrix} \lambda_0 & & t_0 \\ & C_0 & \\ & & \lambda_0 \end{pmatrix} \in \mathcal{A},$$

使得对任意

$$X = \begin{pmatrix} \lambda & & t \\ & C & \\ & & \lambda \end{pmatrix} \in \mathcal{A},$$

有 $\delta X = \delta_{A_0} X$. 这将导致 $\delta X = 0$ 的矛盾,所以 δ 不是内的.

§6.4 算子代数的不变子空间

本节对$\prod_1$空间上一般对称算子代数的形式不变性、不变子空间和公共不变子空间问题进行讨论，给出若干结果.

1. 引言

$\prod_1$空间上的拓扑是由$\prod_1$空间的正定内积$(\cdot,\cdot)$引入的范数$\|\cdot\|$所确定的. 与范数$\|\cdot\|$相应可给出$B(\prod_1)$中算子A的范数$\|A\|$. 这个算子范数确定了$B(\prod_1)$上的一致拓扑. 若算子代数$\mathcal{A}$按一致拓扑是闭的，则$\mathcal{A}$是$\prod_1$上的JC^*-代数.

设$\mathcal{A}$是$\prod_1$空间上有单位的一般JC^*-代数，则$\mathcal{A}$有零性不变子空间. 令Z是$\mathcal{A}$的不变子空间，则$\dim Z=1$. 记$Z^*=J_0Z$，则Z^*为Z的对偶，记$H=(Z+Z^*)^{[\perp]}$，于是得到空间$\prod_1$的正规分解

$$\prod\nolimits_1=(Z\oplus H)+Z^*.$$

这里H是一个 Hilbert 空间，$Z=Span\{\xi\}$，$Z^*=Span\{\eta\}$，且满足

$$[\xi,\xi]=[\eta,\eta]=0,$$

$$[\xi,\eta]=(\xi,\xi)=(\eta,\eta)=1.$$

相应的度规算子为

$$J=\begin{pmatrix} & & J_1\\ & I & \\ J_3 & & \end{pmatrix},$$

其中I为H上的单位算子. 并且

$$J_1^*=J_3,\quad J_1J_3=I_Z,\quad J_3J_1=I_{Z^*}.$$

定理 6.3 $\prod_1$空间上一般的JC^*-代数的形式与正规分解无关.

证明 为叙述方便，设$\prod_1$空间的直交规范基为$\{e_{-1},e_i\mid i\in\Lambda\}$，

其中

$$[e_{-1},e_{-1}]=-1,[e_{-1},e_i]=0,$$

$$[e_i,e_j]=0,i\neq j,[e_i,e_i]=1,i\in\Lambda.$$

不妨设正规分解中

$$\xi=\frac{e_{-1}+e_1}{\sqrt{2}},\eta=\frac{-e_{-1}+e_1}{\sqrt{2}},e_1\in\{e_i\mid i\in\Lambda\}.$$

(1) 设$\mathcal{A}$是第 III_a 类代数. 对 $A\in\mathcal{A}$,由 $A\xi=\lambda\xi$ 及 $A\eta=\mu\eta$,有

$$Ae_{-1}=\frac{\lambda+\mu}{2}e_{-1},Ae_1=\frac{\lambda+\mu}{2}e_1.$$

设 Z' 是$\mathcal{A}$的另一个零性不变子空间. 并设

$$Z'=span\{\xi'\},\xi'=\frac{e_{-1}+e}{\sqrt{2}},$$

这里

$$(e,e)=1,e\in span\{e_i\mid i\in\Lambda\}.$$

取 Z' 的对偶

$$Z'^*=J_0Z'=span\{\eta'\},$$

这里 $\eta'=\frac{-e_{-1}+e}{\sqrt{2}}$. 设 $A\xi'=\lambda'\xi'$,则

$$A\xi'=\frac{\lambda'}{\sqrt{2}}e_{-1}+\frac{\lambda'}{\sqrt{2}}e.$$

又

$$A\eta'=-A(\frac{e_{-1}}{\sqrt{2}})+A(\frac{e}{\sqrt{2}}),$$

于是

$$(\sqrt{2}-\frac{1}{\sqrt{2}})Ae=\frac{\lambda'}{\sqrt{2}}e+\frac{1}{\sqrt{2}}(\lambda'-\frac{\lambda+\mu}{2})e_{-1}.$$

由 $Ae_1 \in span\{e_1\}$，有 $\lambda' = \frac{\lambda+\mu}{2}$. 于是

$$A\xi' = \frac{\lambda+\mu}{2}\xi', A\eta' = \frac{\lambda+\mu}{2}\eta'.$$

所以代数$\mathcal{A}$在正规分解

$$\prod_1 = (Z' \oplus H') + Z'^*, H' = (Z' + Z'^*)^{[\perp]}$$

下的形式为

$$\mathcal{A} = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{\lambda+\mu}{2} & & \\ & M' & \\ & & \frac{\lambda+\mu}{2} \end{pmatrix} : \lambda, \mu \in \mathbf{C}, M' \in \mathcal{U}' \right\},$$

这里$\mathcal{U}'$ 是 Hilbert 空间 H' 上的 C* - 代数.

(2) 在上述证明中令 $\mu = \lambda$ 即得第 II_a 类代数的证明.

(3) 对第 0 类代数$\mathcal{A}$有

$$\mathcal{A} = \lambda I + \mathcal{M},$$

$$\mathcal{M} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & & \\ & M & \\ & & 0 \end{pmatrix} : M \in \mathcal{U} \right\}.$$

λI 与正规分解无关. 现在说明$\mathcal{M}$与分解的选取无关. 这只要在(1) 的证明中令 $\lambda = \mu = 0$ 即可.

(4) 若第 III_b 类代数在某个正规分解下具有对角形式，则由(1)，(2) 知 III_b 在任意选取的零性不变子空间对应的正规分解下是对角型的.

(5) 第 II_b 类代数的证明同(4).

(6) 设$\mathcal{A}$是第 I 类代数，则

$$\mathcal{A} = \lambda I + \left\{ \begin{pmatrix} 0 & (q(M^*) + y + Pu) \otimes \xi & t \\ & M & \eta \otimes (q(M) + z + u) \\ & & 0 \end{pmatrix} : t \in \mathbf{C}, M \in \mathcal{U}, y, z \in R, u \in D \right\}.$$

如同(3)、(4) 的证明可知结论成立.

2. 不变子空间条件

相对与正规分解，对 $x \in \prod_1$，记

$$x = z \oplus h + z' = (z, h, z')^T,$$

其中 $z \in Z, h \in H, z' \in Z^*$. 将 $z \oplus 0 + z'$ 简记为 $z + z'$.

$\prod_1$ 空间的包含 $Z + Z^*$ 的子空间是

$$\prod{}'_1 = (Z \oplus H_1) + Z^*,$$

这里 H_1 是 Hilbert 空间 H 的子空间.

定理 6.4　(1) 第 0，II_a 和 III_a 类一般 JC* - 代数有包含 $Z + Z^*$ 维数大于 2 的 $\prod_1$ 型不变子空间的等价条件是 $\mathcal{U}$ 有维数大于 0 的不变子空间.

(2) 第 II_b 和 III_b 类一般 JC* - 代数有包含 $Z + Z^*$ 维数大于 2 的 $\prod_1$ 型不变子空间等价条件是 $\mathcal{U}$ 有维数大于 0 的不变子空间 H_1，且 $H_1 \supseteq R$.

(3) 第 Ⅰ 类一般 JC* - 代数有包含 $Z + Z^*$ 维数大于 2 的 $\prod_1$ 型不变子空间等价条件是 $\mathcal{U}$ 有维数大于 0 的不变子空间 H_1，且 $H_1 \supseteq \mathcal{R}, D, q(\mathcal{U})$.

证明　(1) 由 $Z + Z^*$ 是 2 维的不变子空，并通过直接计算可得结论.

(2) II_b 和 III_b 情况是类似的. 只就 III_b 类 JC* - 代数加以证明.

必要性：设

$$\prod{}'_1 = (Z \oplus H_1) + Z^*$$

是 III_b 类 JC* - 代数 $\mathcal{A}$ 包含 $Z + Z^*$ 维数大于 2 的 $\prod_1$ 型不变子空间. 因 $Z + Z^*$ 是 2 维的，所以 H_1 的维数大于 0. 对 $x = (a, h, b)^T \in \prod{}'_1$，$Ax \subseteq \prod{}'_1$，即有

$$\begin{pmatrix} \lambda & y \otimes \xi & t \\ & M & \eta \otimes z \\ & & \mu \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} \lambda a & + (h, y) & + tb \\ & Mh & + bz \\ & & \mu b \end{pmatrix} \in \prod{}'_1.$$

所以 $Mh, bz \in H_1$. 即 $\mathcal{U} H_1 \subseteq H_1$，$\mathcal{R} \subseteq H_1$.

充分性：对 $x = (a, h, b)^T \in \prod{}'_1$，若 $\mathcal{U} H_1 \subseteq H_1$，$\mathcal{R} \subseteq H_1$，则有

$$\begin{pmatrix} \lambda & y \otimes \xi & t \\ & M & \eta \otimes z \\ & & \mu \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} \lambda a & + (h, y) & + tb \\ & Mh & + bz \\ & & \mu b \end{pmatrix} \in \prod{}'_1.$$

(3) 因对 $x=(a,h,b)^T\in\prod'_1$,有

$$\begin{pmatrix}\lambda & (q(M^*)+y+Pu)\otimes\xi & t\\ & \lambda I_H+M & \eta\otimes(q(M)+z+u)\\ & & \lambda\end{pmatrix}x$$

$$=\begin{pmatrix}\lambda a & +(h,(q(M^*)+y+Pu)) & +tb\\ & (\lambda I_H+M)h & +b(q(M)+z+u)\\ & & \lambda b\end{pmatrix}$$

$$q(M),q(M^*)\in q(\mathcal{U});y,z\in R;u,Pu\in D,$$

所以(3) 的证明与(2) 相似,只要将子空间 $R+D+q(\mathcal{U})$ 作为(2) 的证明中的 R 即可.

定理 6.5 $\prod_1$ 空间上一般 JC* - 代数包含 $Z+Z^*$ 的$\prod_1$ 型不变子空间与 C* - 代数$\mathcal{U}$的不变子空间 H_1 一一对应.

证明 设

$$\prod_1=(Z\oplus H_1)+Z^*$$

和

$$\prod'_1=(Z\oplus H'_1)+Z^*$$

是$\prod_1$ 空间上一般 JC* - 代数$\mathcal{A}$包含 $Z+Z^*$ 的$\prod_1$ 型不变子空间.若$\prod_1\neq\prod'_1$,则自然有 $H'_1\neq H_1$.

注:一般情况下定理 6.5 不正确.

例 6.3 对第 0、II_a 和 III_b 类 JC* - 代数,不变子空间 $Z,Z+Z^*$ 都对应 C* - 代数$\mathcal{U}$的不变子空间 $H_1=0$.

3. $\mathcal{A}$与$\mathcal{A}^*$ 的公共不变子空间

定义 6.1 设$\mathcal{A}$是$\prod_1$ 空间上一般 JC* - 代数.

$$\mathcal{A}^*=\{A^*\mid A\in\mathcal{A}\},$$

称$\mathcal{A}^*$ 为$\mathcal{A}$的 * - 伴随代数.

定理 6.6 $\prod_1$ 空间上一般 JC* - 代数$\mathcal{A}$的 * - 伴随代数$\mathcal{A}^*$与$\mathcal{A}$的包含 $Z+Z^*$ 的$\prod_1$ 型不变子空间是一致的.

证明　若$\mathcal{A}$是第0、II_a或III_a类JC*-代数，则$\mathcal{A}^* = \mathcal{A}$. 若$\mathcal{A}$是第I、$\text{II}_b$或$\text{III}_b$类JC*-代数，则三种情况的证明是类似的. 只证$\mathcal{A}$是第$\text{III}_b$类代数的情况. 此时

$$\mathcal{A}^* = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda & & \\ \xi \otimes y & M & \\ t & z \otimes \eta & \mu \end{pmatrix} : \lambda, \mu, t \in \mathbf{C}; M \in \mathcal{U}; y, z \in R \right\}.$$

因对$x = (a, h, b)^T \in \prod'_1$，有

$$\begin{pmatrix} \lambda & & \\ \xi \otimes y & M & \\ t & z \otimes \eta & \mu \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} \lambda a & & \\ ay & + Mh & \\ ta & + (h, z) & + \mu b \end{pmatrix},$$

所以如同定理6.4(2)中的证明，空间

$$\prod{}'_1 = (Z \oplus H_1) + Z^*$$

是$\mathcal{A}^*$的包含$Z + Z^*$的不变子空间的等价条件是H_1是$\mathcal{U}$的不变子空间，且$H_1 \supseteq R$. 再由定理6.4(2)知$\mathcal{A}^*$与$\mathcal{A}$的包含$Z + Z^*$的$\prod_1$型不变子空间是一致的.

注：一般情况下定理6.4不正确.

例6.4　设$\mathcal{A}$是第I、II_b和III_b类一般JC*-代数. Z是$\mathcal{A}$的不变子空间，但不是$\mathcal{A}^*$的不变子空间. 而Z^*是$\mathcal{A}^*$的不变子空间，但不是$\mathcal{A}$的不变子空间.

§6.5 不变子空间偶对

本节讨论$\prod_1$空间在正则分解下其上的一般对称算子代数的不变子空间偶对的存在性问题，给出若干结果.

定义6.2　设$\mathcal{A}$是$\prod_1$空间上的算子代数，如果存在$\prod_1$的正则分解$\prod_1 = H_- \oplus H_+$，使得H_-与H_+都是$\mathcal{A}$的不变子空间，则称算子代数$\mathcal{A}$存在不变子空间偶对.

定理6.7　设$\mathcal{A}$是第0、II_a类JC*-代数，则

(1) $\mathcal{A}$存在不变子空间偶对.

(2) $\mathcal{A}$存在一维正不变子空间.

(3) $\mathcal{A}$存在二维Π_1 型不变子空间.

证明 第 0 和 Ⅱ$_a$ 类 JC*-代数的证明类似,只就第 Ⅱ$_a$ 类代数加以证明. 令

$$\mathcal{A}=\left\{\begin{pmatrix}\lambda & & \\ & M & \\ & & \lambda\end{pmatrix}:\lambda\in\mathbf{C},M\in\mathcal{U}\right\},$$

是在Π_1 空间的正规分解

$$\Pi_1=(Z\oplus H)+Z^*$$

下的表示式,其中

$$Z=Span\{\xi\},Z^*=Span\{\eta\},$$

并且

$$[\xi,\xi]=[\eta,\eta]=0,(\xi,\xi)=(\eta,\eta)=[\xi,\eta]=1.$$

令

$$e_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(\xi+\eta),e_{-1}=\frac{1}{\sqrt{2}}(\xi-\eta),$$

则

$$(e_1,e_{-1})=0,(e_1,e_1)=-(e_{-1},e_{-1})=1.$$

于是得到Π_1 空间的正则分解

$$\Pi_1=H_-\oplus H_+,$$

其中

$$H_-=Span\{e_{-1}\},H_+=Span\{e_1,H\}.$$

下面证明 H_-,H_+ 都是$\mathcal{A}$的不变子空间,并且

$$\mathcal{A}_{|H_-}=\lambda,\mathcal{A}_{|Span\{e_1\}}=\lambda.$$

对 $x\in\Pi_1$,令 $x=\alpha\xi+x_0+\beta\eta,x_0\in H$. 并记 $x=(\alpha,x_0,\beta)^T$. 则

$$x=\frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha-\beta)e_{-1}+x_0+\frac{\alpha+\beta}{\sqrt{2}}e_1=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha-\beta),x_0,\frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha+\beta)\right)^T.$$

于是对

$$A=\begin{pmatrix}\lambda & & \\ & M & \\ & & \lambda\end{pmatrix}\in\mathcal{A},$$

有

$$Ax=\begin{pmatrix}\lambda & & \\ & M & \\ & & \lambda\end{pmatrix}(\alpha,x_0,\beta)^T$$

$$=\begin{pmatrix}\lambda & & \\ & M & \\ & & \lambda\end{pmatrix}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha-\beta),x_0,\frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha+\beta)\right)^T.$$

所以 $H_\pm$ 是$\mathcal{A}$的不变子空间偶对，且$\mathcal{A}_{|H_-}=\lambda$，$\mathcal{A}_{|Span\{e_1\}}=\lambda$，即 $Span\{e_1\}$ 是$\mathcal{A}$的一维正不变子空间，$Span\{e_1,e_{-1}\}$ 是$\mathcal{A}$的二维$\prod_1$型不变子空间.

注：第 0 和 Ⅱ$_a$ 类 JC* - 代数在定理 6.7 中的正规分解和正则分解下，代数中算子的表示式是相同的.

定理 6.8　第 Ⅰ、Ⅱ$_b$、Ⅲ$_a$ 和 Ⅲ$_b$ 类 JC* - 代数不存在不变子空间偶对. 但存在$\prod_1$型不变子空间.

证明　第 Ⅰ、Ⅱ$_b$、Ⅲ$_a$ 和 Ⅲ$_b$ 类 JC* - 代数的证明是相似的，只就 Ⅲ$_a$ 类证明. 类似于定理 6.7 的证明，令 $x=\gamma e_{-1}+x_0+\delta e_1$，则 $x=\frac{\gamma+\delta}{\sqrt{2}}\xi+x_0\ \frac{\delta-\gamma}{\sqrt{2}}\eta$. 令

$$A=\begin{pmatrix}\lambda & & \\ & M & \\ & & \mu\end{pmatrix}$$

是第 Ⅲ$_a$ 类 JC* - 代数中的算子，则

$$Ax=\left[\frac{\lambda}{2}(\gamma+\delta)-\frac{\mu}{2}(\delta-\gamma)\right]e_{-1}+Mx_0+\left[\frac{\lambda}{2}(\gamma+\delta)+\frac{\mu}{2}(\delta-\gamma)\right]e_1.$$

由此可知，该代数不存在负不变子空间，从而不存在不变子空间偶对. 但 $Span\{e_{-1},e_1\}$ 是该代数的$\prod_1$型不变子空间.

推论 1 设$\mathcal{A}$是$\prod_1$空间上的 JC*-代数，则$\mathcal{A}$是 C*-等价的充分必要条件是$\mathcal{A}$存在不变子空间偶对.

推论 2 第 Ⅰ、Ⅱ$_b$、Ⅲ$_a$ 和 Ⅲ$_b$ 类 JC*-代数都不是 C*-等价的.

第七章 算子代数的抽象定义

本章给出 JC^*-代数的抽象定义,提出 SC^*-代数概念,证明一个 Banach*-代数是 SC^*-代数及抽象的 JC^*-代数的等价条件,并给出 SC^*-代数是Π_k型的条件.最后在Π_k空间上的 SC^*-代数中构造一族 J_--有限正线性泛函的例子.

定义 7.1 $B(\prod)$ 的子代数$\mathscr{A}$称为是具体的 JC^* - 代数，如果它是 # - 对称且一致闭；而称$\mathscr{A}$是强对称的，如果 $J \in \mathscr{A}$.

1943 由 I. M. Gelfand 和 M. Naimark 给出 C^* - 代数的抽象定义，它成为 C^* - 代数的理论基础. 具体的 JC^* - 代数在某些应用中具有重要作用.

2004 童裕孙先生提出下列问题：

问题：给出不依赖于具体 Pontrjagin 空间的 JC^* - 代数的抽象定义.

本章从 Banach* - 代数出发给出 JC^* - 代数的定义，并给出 SC^* - 代数是$\prod_k$ 型的条件.

§ 7.1 JC* - 代数的抽象定义

本节给出 JC^* - 代数的抽象定义以及 JC^* - 代数的抽象描述.

定义 7.2 一个 Banach- 代数$\mathscr{B}$称为是 Banach$^\#$ - 代数，如果$\mathscr{B}$有一个 # - 运算，并且满足

$$(\lambda x + \mu y)^\# = \bar{\lambda} x^\# + \bar{\mu} y^\#,$$

$$(xy)^\# = y^\# x^\#,$$

$$x^{\#\#} = (x^\#)^\# = x.$$

Banach$^\#$ - 代数其实就是 Banach* - 代数，只是为叙述方便将“ * ”改记为“ # ”.

定义 7.3 令$(\mathscr{B}, \#)$是一个有单位元 I 的 Banach$^\#$ - 代数，并且 $J \in \mathscr{B}$. 称 J 是度规算子，如果 $J^2 = I, J^\# J = JJ^\# = I$.

定义 7.4 一个有单位的 Banach$^\#$ - 代数$(\mathscr{B}, \#)$称为是 SC^* - 代数，如果存在 $J \in \mathscr{B}$ 满足

$$\|J^\# A^\# JA\| = \|A\|^2, A \in \mathscr{B}.$$

定义 7.5 一个 Banach$^\#$ - 代数$(\mathscr{A}, \#)$称为是 JC^* - 代数，如果$(\mathscr{A}, \#)$是等距 # - 同构于某个 SC^* - 代数的 # - 子代数.

定理 7.1 一个 Banach$^\#$ - 代数$(\mathscr{B}, \#)$是 SC^* - 代数当且仅当$(\mathscr{B}, \#)$等距 # - 同构于某个完备不定度规空间上强对称的 JC^* - 代数.

证明　必要性：令$(\mathscr{B},\#)$是一个SC* - 代数，$J\in\mathscr{B}$是度规算子. 在$\mathscr{B}$上定义 * - 运算：

$$A^*=J^\# A^\# J, A\in\mathscr{B}.$$

由定义 7.4 知$(\mathscr{B},*)$是一个有单位的 C* - 代数. 这样，由 Gerfand 定理$(\mathscr{B},*)$是 C* - 同构于某个 Hilbert 空间 H 上算子代数$B(H)$的一个有单位 I_H 的C^* - 子代数$(\mathscr{X},*)$. 这里的 C^* - 同构由 ϕ 表示. 容易验证

$$\phi(J)^2=\phi(J), \phi(J)^*\phi(J)=\phi(J)\phi(J)^*=I_H.$$

定义$[\cdot,\cdot]=(\phi(J)\cdot,\cdot)$，则$(H,[\cdot,\cdot])$是一个完备不定度规空间. 在$\mathscr{X}$中定义

$$B^\#=\phi(J)^*B^*\phi(J), B\in\mathscr{X},$$

则$(\mathscr{X},\#)$是$(H,[\cdot,\cdot])$上强对称 JC* - 代数. 定义映射：

$$\psi:(\mathscr{B},\#)\longrightarrow(\mathscr{X},\#),$$

$$\psi(A)=\phi(A), A\in\mathscr{B},$$

则 ψ 保持 # - 运算，因为对 $A\in\mathscr{B}$ 有

$$\psi(A^\#)=\phi(A^\#)=\phi(J^*A^*J)=\phi(J^*)\phi(A^*)\phi(J),$$

$$=\phi(J)^*\phi(A)^*\phi(J)=\phi(A)^\#=\psi(A)^\#.$$

由 ϕ 是 C^* - 同构知 ϕ 是等距的. 这样 ψ 是从$(\mathscr{B},\#)$到$(\mathscr{X},\#)$上的 # - 同构.

充分性：设 Banach# - 代数$(\mathscr{B},\#)$是等距 # - 同构于完备不定度规空间上强对称 JC* - 代数，并且 J_0 是度规算子. 用 π 表示这个同构，则 $\pi^{-1}(J_0)$ 是$(\mathscr{B},\#)$的度规算子. 并且有

$$\begin{aligned}
&\|\pi^{-1}(J_0)^\# A^\# \pi^{-1}(J_0)A\|\\
=&\|\pi^{-1}(J_0)^\#(\pi^{-1}(\pi(A)))^\#\pi^{-1}(J_0)\pi^{-1}(\pi(A))\|\\
=&\|J_0^\#\pi(A)^\# J_0\pi(A)\|\\
=&\|\pi(A)^*\pi(A)\|\\
=&\|\pi(A)\|^2\\
=&\|A\|^2.
\end{aligned}$$

所以$(\mathscr{B},\#)$是 SC* - 代数.

定理 7.2 一个 Banach$^\#$ - 代数$(\mathscr{A},\#)$是 JC* - 代数当且仅当$(\mathscr{A},\#)$等距 $\#$ - 同构于完备不定度规空间上具体的 JC* - 代数.

证明 必要性:由定义 7.5,7.2 和定理 7.1 即得.

充分性:假设$(\mathscr{A},\#)$是等距 $\#$ - 同构于完备不定度规空间$(H,[\cdot,\cdot])$上的 JC* - 代数$(\mathscr{X},\#)$. 因$(\mathscr{X},\#)\subseteq(B(H),\#)$,而$(B(H),\#)$显然是 SC* - 代数,再由定义 7.5 即得结论.

定义 7.6 令 H 是 Hilbert 空间,且 $B(H)$ 是 H 上有界线性算子集,$(\mathscr{B},\#)$是 Banach$^\#$ - 代数,称映射 $\pi:\mathscr{B}\longrightarrow B(H)$ 是$(\mathscr{B},\#)$在 H 上的代数表示,并表示为(π,H),如果对 $A,B\in\mathscr{B}$ 有

$$\pi(\lambda A+\mu B)=\lambda\pi(A)+\mu\pi(B),$$

$$\pi(AB)=\pi(A)\pi(B).$$

定义 7.7 一个具有度规算子 J 的 SC* - 代数$(\mathscr{B},\#)$称为是$\prod_k$型的,如果存在$\mathscr{B}$的保持单位的等距代数表示(π,H)满足下列条件:

$$\pi(J^\# A^\# J)=\pi(A)^*,A\in\mathscr{B},$$

并且 $\pi(J)+I_H$ 或 $\pi(J)-I_H$ 是紧算子.

注:$\pi(J)$ 是 $B(H)$ 的度规算子(见定理 7.3 的证明). 由 $\pi(J)^2=I$ 知,$\pi(J)$ 的谱是$\{-1,+1\}$. 置 $\pi(J)=P_+-P_-$,这里 P_+ 与 P_- 分别是相应于$+1$和-1的投影,则 $P_++P_-=I_H$. 所以 $\pi(J)+I_H$(或 $\pi(J)-I_H$)是紧算子,当且仅当 $\pi(J)+I_H$(或 $\pi(J)-I_H$)是有限秩的,或当且仅当 P_+(或 P_-)是有限秩的.

定义 7.8 一个 Banach$^\#$ - 代数$(\mathscr{A},\#)$称为是$\prod_k$型的 JC* - 代数,如果$(\mathscr{A},\#)$是等距 $\#$ - 同构于$\prod_k$型 SC* - 代数的某个子代数.

定理 7.3 一个 Banach$^\#$ - 代数$(\mathscr{B},\#)$是$\prod_k$的 SC* - 代数当且仅当$(\mathscr{B},\#)$是等距 $\#$ - 同构于$\prod_k$空间上某个强对称的 JC* - 代数.

证明 必要性:令$(\mathscr{B},\#)$是$\prod_k$型的 SC* - 代数. 由定义 7.7 存在度规算子 $J\in\mathscr{B}$ 和$(\mathscr{B},\#)$的一个保持单位的等距代数表示(π,H)满足:

$$\pi(J^\# A^\# J)=\pi(A)^*,A\in\mathscr{B},$$

这里 $\pi(J)+I$ 或 $\pi(J)-I$ 是紧算子. 易见 $\pi(J)\in B(H)$ 是度规算子,因为 $\pi(J^\#)=\pi(J)^*$.

于是

$$\pi(J)^2 = \pi(I) = I_H, \pi(J)\pi(J)^* = \pi(J)^*\pi(J) = \pi(I) = I_H.$$

因此$(H,[\cdot,\cdot])$是完备不定度规空间，这里的不定内积是由$[\cdot,\cdot] = (\pi(J)\cdot,\cdot)$定义的. 由定理条件知投影$\frac{\pi(J)+I}{2}$或$\frac{\pi(J)-I}{2}$是有限秩的. 因此$(H,[\cdot,\cdot])$是$\prod_k$空间.

在$(\mathscr{B},\#)$中，令$A^* = J^\# A^\# J$，则

$$J^\# = J^*, A^\# = J^* A^* J,$$

于是$(\mathscr{B},*)$是一个 $*$-代数，并且π是$(\mathscr{B},*)$的一个 $*$-表示. 从而有

$$\pi(A^\#) = \pi(J^* A^* J) = \pi(J^*)\pi(A^*)\pi(J) = \pi(J)^*\pi(A)^*\pi(J) = \pi(A)^\#.$$

所以$(\mathscr{B},\#)$是等距 $\#$-同构于$\prod_k$空间$(H,[\cdot,\cdot])$上强对称 JC*-代数$(\pi(\mathscr{B}),\#)$.

充分性：令$(\mathscr{B},\#)$是等距 $\#$-同构于$\prod_k$空间$(H,[\cdot,\cdot])$上强对称 JC*-代数$(\mathscr{X},\#)$，度规算子为J_0，则$J_0 \in \mathscr{X}$. 这里的 $\#$-同构由π表示，则$(H,[J_0\cdot,\cdot])$是 Hilbert 空间. 易见$J = \pi^{-1}(J_0)$是$(\mathscr{B},\#)$的度规算子. 且 $\#$-同构π保持单位，因为

$$\pi(I_H) = \pi(J^2) = \pi(J)^2 = J_0^2 = I_H$$

及

$$\pi(J^\# A^\# J) = \pi(J)^\#\pi(A)^\#\pi(J) = J_0^\#\pi(A)^\# J_0 = \pi(A)^*.$$

由$(H,[\cdot,\cdot])$是$\prod_k$空间知，投影$\frac{\pi(J)+I}{2}$或$\frac{\pi(J)-I}{2}$是有限秩的，从而$\pi(J)+I$或$\pi(J)-I$是紧算子.

定理 7.4　JC*-代数$(\mathscr{A},\#)$是$\prod_k$型 JC*-代数当且仅当$(\mathscr{A},\#)$是等距 $\#$-同构于某$\prod_k$空间上具体 JC*-代数.

证明　必要性：由定义 7.8 和定理 7.3 立得.

充分性：同定理 7.2 的证明.

推论 1　一个有限维的 SC*-代数是$\prod_k$型的.

例 7.1　k不是唯一的. 令$(H,(\cdot,\cdot))$是一个 Hilbert 空间，且$\{e_1,e_2,e_3\}$是正规基. 置

$$\mathscr{A} = \left\{\begin{pmatrix}\lambda & & \\ & \lambda & \\ & & \mu\end{pmatrix} \middle| \lambda,\mu \in \mathbf{C}\right\},$$

则$\mathscr{A} \subseteq B(H)$. 对

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & & \\ & \lambda & \\ & & \mu \end{pmatrix} \in \mathscr{A},$$

定义

$$A^{\#} = \begin{pmatrix} \bar{\lambda} & & \\ & \bar{\lambda} & \\ & & \bar{\mu} \end{pmatrix}$$

和

$$\|A\| = max\{|\lambda|, |\mu|\}.$$

则$(\mathscr{A}, \#)$是一个 Banach$^{\#}$ - 代数.

令

$$J_1 = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix},$$

且

$$J_2 = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & 1 \end{pmatrix},$$

则 H 按度规$[\cdot, \cdot]_1 = (J_1 \cdot, \cdot)$和$[\cdot, \cdot]_2 = (J_2 \cdot, \cdot)$分别是$\prod_1$空间和$\prod_2$空间. 显然,$\mathscr{A} \subseteq B(\prod_1)$,$\mathscr{A} \subseteq B(\prod_2)$,并且

$$A^{\#_1} = J_1^* A^* J_1 = A^{\#}, A \in \mathscr{A},$$

$$A^{\#_2} = J_2^* A^* J_2 = A^{\#}, A \in \mathscr{A}.$$

于是$\mathscr{A}$是等距 # - 同构于$\prod_1$和$\prod_2$空间上 SC* - 代数的子代数.

§7.2 SC*-代数是$\prod_k$型的条件

本节首先提出正泛函的 J-有限性概念，并借此概念及算子代数的 GNS 构造，给出 SC*-代数是$\prod_k$型的条件.

定义 7.9　令$(\mathscr{B},\#)$是具有度规算子 J 的 SC*-代数. $\mathscr{B}$上的一个线性泛函称为是正的，如果 $\phi(J^{\#}A^{\#}JA)\geqslant 0,\forall A\in\mathscr{B}$.

置

$$N_\phi=\{A\mid \phi(J^{\#}A^{\#}JA)=0,A\in\mathscr{B}\},$$

$$X_-=\{A-JA\mid A\in\mathscr{B}\},$$

$$X_+=\{A+JA\mid A\in\mathscr{B}\}.$$

因$(\mathscr{B},*)$是 C*-代数，这里 $A^*=J^{\#}A^{\#}J$，N_ϕ 是$\mathscr{B}$的理想.

定义 7.10　令 ϕ 是具有度规算子 J 的 SC*-代数$(\mathscr{B},\#)$上的正线性泛函. ϕ 称为是 J_--有限的(或 J_+-有限的)，如果

$$X_-/X_-\cap N_\phi(X_+/X_+\cap N_\phi)$$

是有限维的.

定义 7.11　令 F 是 Banach-代数$\mathscr{B}$上的一族线性泛函. F 称为是分离的，如果对 $A\in\mathscr{B}$，对所有的 $\phi\in F$，$\phi(A)=0$ 蕴涵 $A=0$.

定理 7.5　令$(\mathscr{B},\#)$是有度规算子 J 的 SC*-代数. 如果 $F=\{\phi_1,\cdots,\phi_n\}$是$(\mathscr{B},\#)$上一族分离的线性泛函，且所有 $\phi_i\in F(1\leqslant i\leqslant n)$都是 J_--有限的，或所有 $\phi_i\in F(1\leqslant i\leqslant n)$都是 J_+-有限的，则$(\mathscr{B},\#)$是$\prod_k$型的.

证明　(1) 首先，回顾 C*-代数的 GNS 构造. 令 ϕ 是有单位 I 的 C*-代数$(\mathscr{B},*)$上的正线性泛函. 置

$$N_\phi=\{\phi(A^*A)=0,A\in\mathscr{B}\}.$$

在$\mathscr{B}/N_\phi$ 上定义内积如下：

$$< \widetilde{A}, \widetilde{B} >= f(A^* A),$$

$$A \in \widetilde{A} = A + N_\phi,$$

$$B \in \widetilde{B} = B + N_\phi \in \mathscr{B} / N_\phi.$$

令$(H_\phi, <,>)$表示$\mathscr{B} / N_\phi$按上述内积完备化的 Hilbert 空间,这里 $H_\phi = \overline{\mathscr{B} / N_\phi}$.

定义一个映射

$$\pi_\phi(A): \mathscr{B} / N_\phi \longrightarrow \mathscr{B} / N_\phi,$$

$$\pi_\phi(A)\widetilde{B} = \widetilde{AB}.$$

将 $\pi_\phi(A)$ 扩张到 H_ϕ 上,则(π_ϕ, H_ϕ)是$\mathscr{B}$的 $*$ - 表示,且满足

$$\phi(A) = < \pi_\phi(A)\widetilde{I}, \widetilde{I} >, A \in \mathscr{B}.$$

(2) 令 $F = \{\phi_1 \cdots \phi_n\}$ 是$(\mathscr{B}, \#)$上一族分离的 J_- - 有限正线性泛函. 在$\mathscr{B}$中定义 $*$ - 运算如下:

$$A^* = J^\# A^\# J, A \in \mathscr{B}.$$

由定义 7.3 知$(\mathscr{B}, *)$是有单位 I 的 C^* - 代数. 由定义 7.9 $\phi_i \in F(i = 1 \cdots n)$ 是 C^* - 代数$(\mathscr{B}, *)$上的正线性泛函. 由 C^* - 代数上正线性泛函的GNS构造知存在$(\mathscr{B}, *)$的 $*$ - 表示$(\pi_{\phi_i}, H_{\phi_i})$满足:

$$\phi_i(A) = < \pi_{\phi_i}(A)\widetilde{I}, \widetilde{I} >, A \in \mathscr{B},$$

这里 $H_{\phi_i} = \overline{\mathscr{B} / N_{\phi_i}}$. 由于 π_{ϕ_i} 是 $*$ - 表示,且

$$A^* = J^\# A^\# J, A \in \mathscr{B},$$

所以 $\pi_{\phi_i}: (\mathscr{B}, \#) \longrightarrow (B(H_{\phi_i}), *)$ 满足:

$$\pi_{\phi_i}(J^\# A^\# J) = \pi_{\phi_i}(A)^*, A \in \mathscr{B}.$$

(3) 令

$$\pi = \bigoplus_{i=1}^{n} \phi_i, H = \bigoplus_{i=1}^{n} H_{\phi_i},$$

则(π, H)是$(\mathscr{B}, \#)$的 $*$ - 表示. 因 F 是分离的,所以(π, H)是 $*$ - 忠实的,从而是等距的. 显然,表示(π, H)保持单位并且满足:

$$\pi(J^{\#}A^{\#}J)=\pi(A)^{*},A\in\mathscr{B}.$$

（4）因对任意 $\phi_i\in F$，

$$N_{\phi_i}=\{A\mid\phi_i(J^{\#}A^{\#}JA)=0,A\in\mathscr{B}\},$$

$$X_{-}=\{A-JA\mid A\in\mathscr{B}\},$$

有

$$(I_{H_{\phi_i}}-\pi_{\phi_i}(J))\mathscr{B}/N_{\phi_i}=\{(A-JA)+N_{\phi_i}\mid A\in\mathscr{B}\}.$$

再因

$$(I_{H_{\phi_i}}-\pi_{\phi_i}(J))\mathscr{B}/N_{\phi_i}\cong X_{-}/X_{-}\cap N_{\phi_i},$$

且 ϕ_i 是 J_{-}-有限的，$(I_{H_{\phi_i}}-\pi_{\phi_i}(J))\mathscr{B}/N_{\phi_i}$ 是有限维的. 于是

$$\begin{aligned}&(I_{H_{\phi_i}}-\pi_{\phi_i}(J))\overline{\mathscr{B}/N_{\phi_i}}\\ \subseteq&\overline{(I_{H_{\phi_i}}-\pi_{\phi_i}(J))\mathscr{B}/N_{\phi_i}}\\ =&(I_{H_{\phi_i}}-\pi_{\phi_i}(J))\mathscr{B}/N_{\phi_i}\\ \subseteq&(I_{H_{\phi_i}}-\pi_{\phi_i}(J))\overline{\mathscr{B}/N_{\phi_i}}.\end{aligned}$$

因此

$$(I_{H_{\phi_i}}-\pi_{\phi_i}(J))\overline{\mathscr{B}/N_{\phi_i}}=(I_{H_{\phi_i}}-\pi_{\phi_i}(J))\mathscr{B}/N_{\phi_i}.$$

所以 $(I_{H_{\phi_i}}-\pi_{\phi_i}(J))$ 是 $\overline{\mathscr{B}/N_{\phi_i}}$ 上有限秩算子，因而

$$I_H-\pi(J)=\bigoplus_{i=1}^{n}(I_{H\phi_i}-\pi_{\phi_i}(J)).$$

故 $(\mathscr{B},\#)$ 是 $\prod_k$ 型的. 如果所有 ϕ_i 是 J_{+}-有限的，则证明是类似的.

§7.3 一个例子

本节在 $\prod_k$ 空间上的 SC*-代数中构造一族 J-有限正线性泛函的例子.

例 7.2 令

$$\prod_k = H_+ \oplus H_-,$$

是$\prod_k$空间的正则分解. 相应的度规算子是 J, 并且空间 $H_\pm$ 上的投影由 $P_\pm$ 表示. 令($\mathscr{B}$, #) 是空间$\prod_k$ 上 SC* - 代数, 满足 $H_- \subseteq (BH_-)^\perp$.

令 $M = \{f_1, f_2, \cdots, f_k\}$ 是 Hilbert 空间(H_-,(·, ·)) 的直交规范基. 定义函数

$$\phi_i : \mathscr{B} \longrightarrow \mathbf{C}, \phi_i(B) = (Bf_i, f_i),$$

这里 $B \in \mathscr{B}$, $f_i \in M$, $i = 1, 2, \cdots, k$. 则

$$\phi_i(J^\# B^\# JB) = \phi_i(B^* B) = (B^* Bf_i, f_i) = (Bf_i, Bf_i) \geqslant 0.$$

因此 $\phi_i(i = 1, 2, \cdots, k)$ 是($\mathscr{B}$, #) 上正线性泛函.

由 $H_- \subseteq (BH_-)^\perp$ 知对任意 $B \in \mathscr{B}$,

$$\begin{aligned} \phi_i(B - JB) &= ((B - JB)f_i, f_i) \\ &= (((P_+ + P_-)B - (P_+ - P_-)B)f_i, f_i) \\ &= 2(P_- Bf_i, f_i) = 0. \end{aligned}$$

这样

$$\begin{aligned} X_- &= \{B - JB \mid B \in \mathscr{B}\} \\ &\subseteq \{B \mid \phi_i(J^\# B^\# JB) = 0, B \in \mathscr{B}\} \\ &= N_{\phi_i}. \end{aligned}$$

因此 $X_- / X_- \cap N_{\phi_i} = \{0\}$, 即 $X_- / X_- \cap N_{\phi_i}$ 是有限维的. 所以 $\phi_i(i = 1, 2, \cdots, k)$ 是 SC* - 代数($\mathscr{B}$, #) 上 J_- - 有限正线性泛函.

第八章

Pontrjagin 空间上的算子代数理论的应用

本章在Π_k空间的正则分解和正规分解下给出算子的表示形式，讨论了Π_k空间上算子的交换性问题，给出若干交换性定理，给出算子表示的运算及算子范数不等式.

§ 8.1 在算子交换性方面的应用

本节通过例子说明在$\prod_1$空间上 Putnam-Fuglele 定理一般是不成立的. 这里通过给出相应$\prod_1$空间正则分解的算子表示,给出$\prod_1$空间上 Putnam-Fuglele 定理成立的一个较为广泛的条件.

对于 Hilbert 空间上的正规算子 A,即 $AA^* = A^*A$,及任意算子 B,若满足 $AB = BA$,则必有 $A^*B = BA^*$,这一结论就是熟知的 Putnam-Fuglele 定理(简称 P-F 定理). 但在 Pontrjagin 空间上,我们构造例子说明这一结论一般不再成立. 这里我们给出$\prod_1$空间上的一个正则分解,借此分解给出$\prod_1$空间上 P-F 定理成立的条件.

1. 例子

首先给出 P-F 定理不成立的例子.

例 8.1 取$\prod_1$空间的正规分解$\prod_1 = (Z \oplus H) + Z^*$. 相对该分解取$\prod_1$空间上的算子

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x \otimes \xi & 0 \\ & \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix} & \eta \otimes y \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

及

$$B = \begin{pmatrix} 1 & x' \otimes \xi & 1 \\ & \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix} & \eta \otimes y' \\ & & 1 \end{pmatrix},$$

其中 ξ 与 η 分别是 Z 与 Z^* 的标准基. 令

$$x = \begin{pmatrix} i \\ i \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}; x' = \begin{pmatrix} \sqrt{2}i \\ 1 \end{pmatrix}, y' = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

则

$$A^{\#}=\begin{pmatrix}1 & y\otimes\xi & 0\\ & \begin{pmatrix}1 & \\ & 1\end{pmatrix} & \eta\otimes x\\ & & 1\end{pmatrix},$$

并且

$$AA^{\#}=\begin{pmatrix}1 & \begin{pmatrix}\sqrt{2}+i\\ 0\end{pmatrix}\otimes\xi & 2\\ & \begin{pmatrix}1 & \\ & 1\end{pmatrix} & \eta\otimes\begin{pmatrix}\sqrt{2}i\\ 0\end{pmatrix}\\ & & 1\end{pmatrix},$$

$$A^{\#}A=\begin{pmatrix}1 & \begin{pmatrix}\sqrt{2}+i\\ 0\end{pmatrix}\otimes\xi & 2\\ & \begin{pmatrix}1 & \\ & 1\end{pmatrix} & \eta\otimes\begin{pmatrix}\sqrt{2}+i\\ 0\end{pmatrix}\\ & & 1\end{pmatrix}.$$

所以 A 是正规算子. 并且有

$$AB=\begin{pmatrix}1 & \begin{pmatrix}(\sqrt{2}+1)i\\ 1+i\end{pmatrix}\otimes\xi & 2i+1\\ & \begin{pmatrix}1 & \\ & 1\end{pmatrix} & \eta\otimes\begin{pmatrix}\sqrt{2}+1\\ 1\end{pmatrix}\\ & & 1\end{pmatrix},$$

$$BA=\begin{pmatrix}1 & \begin{pmatrix}(\sqrt{2}+1)i\\ 1+i\end{pmatrix}\otimes\xi & 2i+1\\ & \begin{pmatrix}1 & \\ & 1\end{pmatrix} & \eta\otimes\begin{pmatrix}\sqrt{2}+1\\ 1\end{pmatrix}\\ & & 1\end{pmatrix}.$$

即 $AB = BA$. 但是

$$A^{\#}B = \begin{pmatrix} 1 & \begin{pmatrix} \sqrt{2}+\sqrt{2}i \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \xi & \sqrt{2}+1 \\ & \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix} & \eta \otimes \begin{pmatrix} 1+i \\ 1+i \end{pmatrix} \\ & & 1 \end{pmatrix},$$

$$BA^{\#} = \begin{pmatrix} 1 & \begin{pmatrix} \sqrt{2}+\sqrt{2}i \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \xi & i-\sqrt{2}-1 \\ & \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix} & \eta \otimes \begin{pmatrix} 1+i \\ 1+i \end{pmatrix} \\ & & 1 \end{pmatrix}.$$

所以 $A^{*}B \neq BA^{*}$.

2. 算子的表示

设$\prod_1$ 空间有正则分解

$$\prod\nolimits_1 = H_- \oplus H_+,$$

其中 $H_- = span\{e_-\}$. $\prod_1$ 上的不定内积为$[\cdot,\cdot]$,正定内积为$(\cdot,\cdot)$,

$$[e_-, e_-] = -1, (e_-, e_-) = 1.$$

对$\prod_1$ 上的算子 A,用 $A^{\#}$ 表示 A 关于$[\cdot,\cdot]$ 的共轭算子,而关于 Hilbert 空间的共轭用 A^* 表示. 相应于上述正则分解的度规算子为

$$J = \begin{pmatrix} -1 & \\ & I \end{pmatrix},$$

其中 I 是 Hilbert 空间 H_+ 上的单位算子. 对于$\prod_1$ 空间上的任意有界线性算子 A,相对于$\prod_1$ 的上述正则分解可唯一地表示成下列形式:

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix},$$

其中 A_{11} 是 H_- 到 H_- 的有界线性算子，A_{12} 与 A_{21} 分别是 H_+ 到 H_- 与 H_- 到 H_+ 的有界线性算子，而 A_{22} 是 H_+ 到 H_+ 的有界线性算子.

引理 8.1　$\prod_1$ 空间上的有界线性算子 A 相对于正则分解可唯一地表示为

$$A=\begin{pmatrix}\lambda & x\otimes e_- \\ e_-\otimes y & A_{22}\end{pmatrix},$$

其中 $\lambda\in\mathbf{C}, x, y\in H_+, A_{22}$ 是 H_+ 到 H_+ 的有界线性算子. $x\otimes e_-$ 与 $e_-\otimes y$ 都是一秩算子，并且

$$A^{\#}=\begin{pmatrix}\bar{\lambda} & -y\otimes e_- \\ -e_-\otimes x & A_{22}^*\end{pmatrix}.$$

证明　设 $x=x_-+x_+, x_\pm\in H_\pm$，则 $A_{11}x_-\in H_-$，设 $A_{11}e_-=\lambda e_-, x_-=ke_-$，则

$$A_{11}x_-=kA_{11}e_-=\lambda(ke_-)=\lambda x_-,$$

所以 $A_{11}=\lambda$.

再设 $A_{12}x_+=\alpha e_-$，则

$$(A_{12}x_+, e_-)=(\alpha e_-, e_-)=\alpha.$$

又 $(x_+, A_{12}^*e_-)=\alpha$，再令 $x=A_{12}^*e_-$，则 $A_{12}=x\otimes e_-$.

因

$$A_{21}x_-=A_{21}(ke_-)=k(A_{21}e_-),$$

所以，令 $y=A_{21}e_-$，就有 $A_{21}=e_-\otimes y$.

最后

$$\begin{aligned}A^{\#}&=JA^*J\\&=\begin{pmatrix}-1 & \\ & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\bar{\lambda} & y\otimes e_- \\ e_-\otimes x & A_{22}^*\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & \\ & 1\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}\bar{\lambda} & -y\otimes e_- \\ -e_-\otimes x & A_{22}^*\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

3. 交换性定理及其证明

定理 8.1:(Putnam-Fuglele 定理)

对$\prod_1$ 空间上的正规算子

$$A=\begin{bmatrix}\lambda & x\otimes e_- \\ e_-\otimes y & A_{22}\end{bmatrix},$$

其中 $A_{22}A^* - A_{22}^*A_{22}$ 不是一秩和二秩算子,以及任意算子

$$B=\begin{bmatrix}\mu & x'\otimes e_- \\ e_-\otimes y' & B_{22}\end{bmatrix},$$

这里 $A_{22}B_{22}-B_{22}A_{22}$ 也不是一秩和二秩算子.若 $AB=BA$,则有 $A^{\#}B=BA^{\#}$.

证明:分以下七步来证明.

(1) 算子 A 是正规算子的充要条件是

(ⅰ) $x=a_0 y$, $|a_0|=1$.

(ⅱ) $A_{22}A_{22}^*=A_{22}^*A_{22}$.

(ⅲ) $(\bar{\lambda}-A_{22}^*)y=(-\lambda+A_{22})x$.

因为

$$AA^{\#}=\begin{bmatrix}\lambda & x\otimes e_- \\ e_-\otimes y & A_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{\lambda} & -y\otimes e_- \\ -e_-\otimes x & A_{22}^*\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}|\lambda|^2-(x,x) & (-\bar{\lambda}y+A_{22}x)\otimes e_- \\ e_-\otimes(\bar{\lambda}y-A_{22}x) & -(y\otimes y)+A_{22}A_{22}^*\end{bmatrix},$$

及

$$A^{\#}A=\begin{bmatrix}\bar{\lambda} & -y\otimes e_- \\ -e_-\otimes x & A_{22}^{\#}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda & x\otimes e_- \\ e_-\otimes y & A_{22}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}|\lambda|^2-(y,y) & (\lambda x-A_{22}^*y)\otimes e_- \\ e_-\otimes(-\lambda x+A_{22}^*y) & -(x\otimes x)+A_{22}^*A_{22}\end{bmatrix},$$

并且 $A_{22}A^* - A_{22}^*A_{22}$ 不是一秩和二秩算子,所以 $AA^{\#}=A^{\#}A$ 等价于下列一组条件:

$$(x,x)=(y,y),$$

$$x\otimes x=y\otimes y,$$

$$A_{22}A_{22}^*=A_{22}^*A_{22},$$

$$\bar{\lambda}y-A_{22}x=-\lambda x+A_{22}^*y,$$

$$-\bar{\lambda}y+A_{22}x=\lambda x-A_{22}^*y.$$

前两个条件等价于(ⅰ);第三个等式就是(ⅱ);最后两个等式是相同的,就是(ⅲ).

(2) 算子 A 与 B 可交换的充要条件是

(ⅰ) $x'\otimes y=x\otimes y'$;

(ⅱ) $(x,y')=(x',y)$;

(ⅲ) $A_{22}B_{22}=B_{22}A_{22}$;

(ⅳ) $(\bar{\lambda}-A_{22}^*)x'=(\bar{\mu}-B_{22}^*)x$;

(ⅴ) $(\mu-B_{22})y=(\lambda-A_{22})y'$.

因为

$$AB=\begin{pmatrix}\lambda & x\otimes e_- \\ e_-\otimes y & A_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mu & x'\otimes e_- \\ e_-\otimes y' & B_{22}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\lambda\mu+(y,x') & (\bar{\lambda}x+B_{22}^*x')e_- \\ e_-\otimes(\mu y+A_{22}y') & (x'\otimes y)+A_{22}B_{22}\end{pmatrix}$$

及

$$BA=\begin{pmatrix}\mu & x'\otimes e_- \\ e_-\otimes y' & B_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda & x\otimes e_- \\ e_-\otimes y & A_{22}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\lambda\mu+(y,x') & (\bar{\mu}x+A_{22}^*x')\otimes e_- \\ e_-\otimes(\lambda y'+B_{22}y) & (x\otimes y')+B_{22}A_{22}\end{pmatrix}$$

并且 $A_{22}B_{22}-B_{22}A_{22}$ 不是一秩和二秩算子,所以 $AB=BA$ 等价于下列条件:

$$(y',x)=(y,x'),x'\otimes y=x\otimes y',A_{22}B_{22}=B_{22}A_{22},$$

$$\bar{\lambda}x'+B_{22}^*x=\bar{\mu}x+A_{22}^*x',\mu y+A_{22}y'=\lambda y'+B_{22}y.$$

这五个等式便是条件(ⅰ)～(ⅴ).

(3) 算子 B 与 $A^{\#}$ 可交换的充要条件是：

(ⅰ) $x' \otimes x = y \otimes y'$;

(ⅱ) $(x, x') = (y', y)$;

(ⅲ) $B_{22}A_{22}^* = A_{22}^* B_{22}$;

(ⅳ) $(\lambda - A_{22})x' = (-\bar{\mu} + B_{22}^*)y$;

(ⅴ) $(\bar{\lambda} - A_{22}^*)y' = (-\mu + B_{22})x$.

与(1) 和(2) 的证明类似，通过计算 $BA^{\#}$ 与 $A^{\#}B$ 便得.

$$BA^{\#} = \begin{pmatrix} \mu & x' \otimes e_- \\ e_- \otimes y' & B_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\lambda} & -y \otimes e_- \\ -e_- \otimes x & A_{22}^* \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \bar{\lambda}\mu - (x, x') & (-\bar{\mu}y + A_{22}x') \otimes e_- \\ e_- \otimes (\bar{\lambda}y' - B_{22}y) & -(y \otimes y') + B_{22}A_{22}^* \end{pmatrix}$$

及

$$A^{\#}B = \begin{pmatrix} \bar{\lambda} & -y \otimes e_- \\ -e_- \otimes x & A_{22}^{\#} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu & x' \otimes e_- \\ e_- \otimes y' & B_{22} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \bar{\lambda}\mu - (y', y) & (\lambda x' - B_{22}^* y) \otimes e_- \\ e_- \otimes (-\mu x + A_{22}^* y') & -(x' \otimes x) + A_{22}^* B_{22} \end{pmatrix}.$$

于是 $A^{\#}B = BA^{\#}$ 等价于

$$(x, x') = (y', y), x' \otimes x = y \otimes y', B_{22}A_{22}^* = A_{22}^* B_{22},$$

$$-\bar{\mu}y + A_{22}x' = \lambda x' - B_{22}^* y, \bar{\lambda}y' - B_{22}x = -\mu x + A_{22}^* y'.$$

整理便得条件(ⅰ)～(ⅴ).

(4) 当 $x \neq 0$ 时，P-F 定理成立.

首先由(1)(ⅱ)，(2)(ⅲ) 及 Hilbert 空间上的 P-F 定理可推得条件(3)(ⅲ).

其次，由 $x \neq 0$ 及(1)(ⅰ) 知 $y \neq 0$. 再由条件(2)(ⅰ) 可设 $x' = ax$ 及 $y = by'$，将这两个式子代入(2)(ⅱ) 得到

$$(x', y) = (ax, by') = a\bar{b}(x, y').$$

再由(2)(ⅱ)及 B 的任意性知 $a\bar{b}=1$. 即有 $b=\dfrac{1}{a}$. 于是 $y'=\bar{a}y$. 通过直接验证可知(3)(ⅰ)(ⅱ)成立.

最后来证明(3)(ⅳ)(ⅴ)是成立的. 这需要利用

$x'=ax$，　$y'=\bar{a}y$，　$x=a_0y$, 以及条件(1)(ⅲ),(2)(ⅳ)(ⅴ).

$$\begin{aligned}&(\lambda-A_{22})x'=(\lambda-A_{22})ax\\&=-a(-\lambda+A_{22})x=-a(\bar{\lambda}-A_{22}^*)y\\&=-\frac{a}{a_0}(\bar{\lambda}-A_{22}^*)x\\&=-\frac{1}{a_0}(\bar{\mu}-B_{22}^*)x=(-\bar{\mu}+B_{22}^*)y.\\&(\bar{\lambda}-A_{22}^*)y'=(\bar{\lambda}-A_{22}^*)\bar{a}y\\&=\bar{a}(-\lambda+A_{22})x=-\bar{a}a_0(\lambda-A_{22})y\\&=-a_0(\lambda-A_{22})y'=-a_0(\mu-B_{22})y\\&=(-\mu+B_{22})x.\end{aligned}$$

(5) 当 $x=0$ 且 $A^\#=A$ 时, P-F 定理成立.

当 $x=0$ 时, $y=0$. 此时条件(3)(ⅰ)(ⅱ)成立. (3)(ⅲ)同(4)也是成立的. 当 $A^\#=A$ 时, 条件(2)(ⅳ)(ⅴ)就是(3)(ⅳ)(ⅴ). 所以 P-F 定理成立.

(6) 当 $x=0$ 且 $A^\#\neq A$, 以及 $\lambda\in\rho(A_{22})$(算子 A_{22} 的正则集)时, P-F 定理成立.

如同(5)条件(3)(ⅰ)～(ⅲ)成立. 当 $x=0$ 时, $y=0$. 由 $\lambda\in\rho(A_{22})$ 知 $\bar{\lambda}\in\rho(A_{22}^*)$, 这样条件(2)(ⅳ)(ⅴ)即

$$(\bar{\lambda}-A_{22}^*)x'=0, (\lambda-A_{22})y'=0$$

中的 x' 与 y' 必都为零. 于是条件(3)(ⅳ)(ⅴ)自然成立.

(7) 当 $x=0$, $A^\#\neq A$ 且 $\lambda\in\sigma(A_{22})$(算子 A_{22} 的谱集)时, P-F 定理成立.

如同(5)条件(3)(ⅰ)～(ⅲ)成立. 当 $x=0$ 时, 有 $y=0$. 由 $\lambda\in\sigma(A_{22})$ 知 $\bar{\lambda}\in\sigma(A_{22}^*)$. 此时条件(2)(ⅳ)(ⅴ)变为

$$\begin{cases}(\bar{\lambda}-A_{22}^\#)x'=0\\(\lambda-A_{22})y'=0\end{cases}\tag{*}$$

在此情况中条件(3)(ⅳ)(ⅴ)即为

$$\begin{cases}(\lambda - A_{22})x' = 0 \\ (\bar{\lambda} - A_{22}^{\#})y' = 0\end{cases} \tag{**}$$

下面说明条件(*)可以推出条件(**).这是因为谱子空间$V(A_{22},\lambda)$与$V(A_{22}^{*},\bar{\lambda})$相同.于是 P-F 定理成立.综上定理得证.

§8.2 Putnam-Fuglede 定理的另一种情况

本节证明了当 Pontrjagin 空间上的正规算子 A 没有零性不变子空间时,Putnam-Fuglede 定理成立;当正规算子 A 有零性不变子空间时,通过构造反例说明此时 Putnam-Fuglede 定理不成立,并对$\prod_1$空间上算子相关的交换性条件进行了讨论,得到了$\prod_1$空间上算子代数的二次交换定理.

1. 引言

对于 Hilbert 空间上的正规算子 A,Putnan-Fuglede 定理成立.但在 Pontrjagin 空间上,这一结论一般不再成立.本节讨论了在 Pontrjagin 空间上 P-F 定理成立的条件.证明了当算子 A 没有零性不变子空间时,P-F 定理成立;当 A 有零性不变子空间,而 B 与 A 无公共零性不变子空间时,P-F 定理也成立.而 A 与 B 有公共零性不变子空间时,通过构造例子说明此时 P-F 定理一般不成立.对最后一种情况,就$\prod_1$空间上的算子进行了讨论.证明了当 A 与 B 及单位算子生成的弱闭对称算子代数$\mathcal{A}$属于第0,Ⅱ$_a$和Ⅲ$_a$类代数时,算子 B 与 A^* 仍可交换;而当$\mathcal{A}$属于第Ⅰ,Ⅱ$_b$和Ⅲ$_b$类代数时,通过例子说明存在 $B\in\mathcal{A}$,使得 B 与 A 可交换.但 B 与 A^* 不可交换,最后给出当$\mathcal{A}$属于第Ⅰ,Ⅱ$_b$和Ⅲ$_b$类代数时,B 与 A^* 可交换的充分条件.

2. 几个引理

引理 8.2 若 Pontrjagin 空间$\prod_k$有正则分解$\prod_k = H_- \oplus H_+$,则$\prod_k$空间上的任意有界线性算子 A 可唯一表示为下列形式

$$A=\begin{pmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{pmatrix},$$

其中 A_{11} 是 k 维 Hilbert 空间 H_-（正定内积为 $-(\cdot,\cdot)$）上的有界线性算子，A_{12} 与 A_{21} 分别是 H_+ 到 H_- 与 H_- 到 H_+ 的有界线性算子. A_{22} 是 Hilbert 空间 H_+ 上的有界线性算子，并且 A 关于 $\prod_k$ 上的不定内积的共轭算子为

$$A^{\#}=\begin{pmatrix}A_{11}^{*} & -A_{21}^{*}\\ -A_{12}^{*} & A_{22}^{*}\end{pmatrix},$$

其中“ * ”是关于正定内积的共轭运算.

证明　引理中 A 的唯一表示形式是显然的. $\prod_k$ 空间的正则分解 $\prod_k=H_-\oplus H_+$ 所对应的度规算子为

$$J=\begin{pmatrix}-I_{H_-} & \\ & I_{H_+}\end{pmatrix},$$

其中 I_{H_-} 与 I_{H_+} 分别是 H_- 与 H_+ 上的单位算子. 于是

$$\begin{aligned}A^{\#}&=JA^{*}J\\ &=\begin{pmatrix}-I_{H_-} & \\ & I_{H_+}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_{11}^{*} & A_{21}^{*}\\ A_{12}^{*} & A_{22}^{*}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-I_{H_-} & \\ & I_{H_+}\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}-A_{11}^{*} & -A_{21}^{*}\\ A_{12}^{*} & A_{22}^{*}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-I_{H_-} & \\ & I_{H_+}\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}A_{11}^{*} & -A_{21}^{*}\\ -A_{12}^{*} & A_{22}^{*}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

引理 8.3　在 C^*-代数 $\mathcal{B}$ 上，P-F 定理成立. 即若 $a\in\mathcal{B}$，且 $a^*a=aa^*$，则对任意 $b\in\mathcal{B}$，由 $ab=ba$ 可推出 $a^*b=ba^*$.

证明　与 Hilbert 空间上算子的 P-F 定理的证明完全类似.

引理 8.4　在算子代数中 P-F 定理是酉等价不变的，即若 $\mathcal{A}$ 与 $\mathcal{B}$ 是 $\prod_k$ 空间上酉等价的两个算子代数，且 $U^{-1}\mathcal{A}U=\mathcal{B}$，$U$ 是 $\prod_k$ 上的酉算子，则 P-F 定理在 $\mathcal{A}$ 上成立等价于 P-F 定理在 $\mathcal{B}$ 上成立.

证明 设 $A_1, A_2 \in \mathcal{A}, B_1, B_2 \in \mathcal{B}$，且满足 $A_1 = U^{-1}B_1U, A_2 = U^{-1}B_2U$，则 $A_1^{\#} = U^{-1}B_1^{\#}U$，于是

$$A_1A_1^{\#} = U^{-1}B_1U \cdot U^{-1}B_1^{\#}U = U^{-1}B_1B_1^{\#}U,$$

$$A_1^{\#}A_1 = U^{-1}B_1^{\#}U \cdot U^{-1}B_1U = U^{-1}B_1^{\#}B_1U,$$

所以 A_1 是正规算子等价于 B_1 是正规算子. 同理 A_1 与 A_2 可交换等价于 B_1 与 B_2 可交换，A_2 与 $A_1^{\#}$ 可交换等价于 B_2 与 $B_1^{\#}$ 可交换.

3. 例子

首先指出当 $\prod_k$ 空间上的正规算子 A 有零性不变子空间时，P-F 定理一般不成立.

例 8.2 取 Pontrjagin 空间是指标为 1 的 $\prod_1$ 空间，且具有分解

$$\prod\nolimits_1 = (Z \oplus H) \dotplus Z^*,$$

其中 Z 为一维零性子空间，Z^* 是 Z 的对偶，H 是一个两维的 Hilbert 空间. 并进一步假设 $Z = span\{\xi\}, Z^* = span\{\eta\}$，且满足：

$$[\xi,\eta] = 1, [\xi,\xi] = 0, [\eta,\eta] = 0, (\xi,\xi) = (\eta,\eta) = 1,$$

这里 $[\cdot,\cdot]$ 是 $\prod_1$ 上的不定内积，$(\cdot,\cdot)$ 是正定内积. 相应的度规算子是

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & J_1 \\ 0 & I_H & 0 \\ J_3 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

其中 I_H 是 H 上的单位算子，且有

$$J_1Z^* = Z, J_3Z = Z^*,$$

$$J_1J_3 = I_Z, J_3J_1 = I_{Z^*}, J_1^* = J_3,$$

I_Z 与 I_{Z^*} 分别是 Z 与 Z^* 上的单位算子.

现取 $\prod_1$ 上的算子

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x \otimes \xi & i \\ & \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix} & \eta \otimes y \\ & & -1 \end{pmatrix},$$

其中 $x,y\in H$，且 $x=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$，$y=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$，$x\otimes\xi$ 与 $\eta\otimes y$ 都是一秩算子，则 A 的共轭算子为

$$A^{\#}=JA^{*}J,$$

这里 A^{*} 是算子 A 关于正定内积的共轭算子. 于是

$$A^{\#}=\begin{pmatrix} & & J_1\\ & I_H & \\ J_3 & & \end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & x\otimes\xi & i\\ & \begin{pmatrix}1 & \\ & -1\end{pmatrix} & \eta\otimes y\\ & & -1\end{pmatrix}^{*}\begin{pmatrix} & & J_1\\ & I_H & \\ J_3 & & \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} & & J_1\\ & I_H & \\ J_3 & & \end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ \xi\otimes x & \begin{pmatrix}1 & \\ & -1\end{pmatrix} & 0\\ -i & y\otimes\eta & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} & & J_1\\ & I_H & \\ J_3 & & \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-i & J_1(y\otimes\eta) & -1\\ \xi\otimes x & \begin{pmatrix}1 & \\ & -1\end{pmatrix} & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} & & J_1\\ & I_H & \\ J_3 & & \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-i & y\otimes\xi & -1\\ \xi\otimes x & \begin{pmatrix}1 & \\ & -1\end{pmatrix} & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} & & J_1\\ & I_H & \\ J_3 & & \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-1 & y\otimes\xi & -i\\ & \begin{pmatrix}1 & \\ & -1\end{pmatrix} & (\xi\otimes x)\cdot J_1\\ & & 1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-1 & y\otimes\xi & -i\\ & \begin{pmatrix}1 & \\ & -1\end{pmatrix} & \eta\otimes x\\ & & 1\end{pmatrix}.$$

下面计算 $A^{\#}A$ 与 $AA^{\#}$.

$$AA^{\#}=\begin{pmatrix}1 & x\otimes\xi & i\\ & \begin{pmatrix}1 & \\ & -1\end{pmatrix} & \eta\otimes y\\ & & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & y\otimes\xi & -i\\ & \begin{pmatrix}1 & \\ & -1\end{pmatrix} & \eta\otimes x\\ & & 1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-1 & y\otimes\xi+(x\otimes\xi)\begin{pmatrix}1 & \\ & -1\end{pmatrix} & (x\otimes\xi)\cdot(\eta\otimes x)\\ & \begin{pmatrix}1 & \\ & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \\ & -1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1 & \\ & -1\end{pmatrix}(\eta\otimes x)+\eta\otimes y\\ & & -1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-1 & \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\otimes\xi+\left(\begin{pmatrix}1 & \\ & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)\otimes\xi & \left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)\cdot(\eta\otimes\xi)\\ & \begin{pmatrix}1 & \\ & 1\end{pmatrix} & \eta\otimes\left(\begin{pmatrix}1 & \\ & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)+\eta\otimes\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\\ & & -1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-1 & \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\otimes\xi & 1\\ & \begin{pmatrix}1 & \\ & 1\end{pmatrix} & \eta\otimes\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\\ & & -1\end{pmatrix},$$

$$A^{\#}A=\begin{pmatrix}-1 & y\otimes\xi & -i\\ & \begin{pmatrix}1 & \\ & -1\end{pmatrix} & \eta\otimes x\\ & & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & x\otimes\xi & i\\ & \begin{pmatrix}1 & \\ & -1\end{pmatrix} & \eta\otimes y\\ & & -1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-1 & -x\otimes\xi+(y\otimes\xi)\begin{pmatrix}1 & \\ & -1\end{pmatrix} & (y\otimes\xi)\cdot(\eta\otimes y)\\ & \begin{pmatrix}1 & \\ & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \\ & -1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1 & \\ & -1\end{pmatrix}(\eta\otimes y)-\eta\otimes x\\ & & -1\end{pmatrix}$$

$$
= \begin{pmatrix} -1 & \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \otimes \xi + \left(\begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \otimes \xi & \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \cdot (\eta \otimes \xi) \\ & \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix} & \eta \otimes \left(\begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) - \eta \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ & & -1 \end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix} -1 & \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \otimes \xi & 1 \\ & \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix} & \eta \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ & & -1 \end{pmatrix},
$$

所以 $A^{\#} A = AA^{\#}$.

现取算子 B 为

$$
B = \begin{pmatrix} 1 & y \otimes \xi & 0 \\ & \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix} & \eta \otimes x \\ & & 1 \end{pmatrix},
$$

则

$$
AB = \begin{pmatrix} 1 & x \otimes \xi & i \\ & \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix} & \eta \otimes y \\ & & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & y \otimes \xi & 0 \\ & \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix} & \eta \otimes x \\ & & 1 \end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix} 1 & y \otimes \xi + (x \otimes \xi) \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix} & i + (x \otimes \xi) \cdot (\eta \otimes x) \\ & \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix} (\eta \otimes x) + \eta \otimes y \\ & & -1 \end{pmatrix}
$$

$$
=\begin{pmatrix} 1 & \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\otimes\xi & i+\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)\cdot(\eta\otimes\xi) \\ & \begin{pmatrix}1&\\&-1\end{pmatrix} & \eta\otimes\left(\begin{pmatrix}1&\\&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)+\eta\otimes\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \\ & & -1 \end{pmatrix}
$$

$$
=\begin{pmatrix} 1 & \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\otimes\xi & i+1 \\ & \begin{pmatrix}1&\\&-1\end{pmatrix} & \eta\otimes\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} \\ & & -1 \end{pmatrix},
$$

$$
BA=\begin{pmatrix} 1 & y\otimes\xi & 0 \\ & \begin{pmatrix}1&\\&1\end{pmatrix} & \eta\otimes x \\ & & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & x\otimes\xi & i \\ & \begin{pmatrix}1&\\&-1\end{pmatrix} & \eta\otimes y \\ & & -1 \end{pmatrix}
$$

$$
=\begin{pmatrix} 1 & x\otimes\xi+(y\otimes\xi)\begin{pmatrix}1&\\&-1\end{pmatrix} & i+(y\otimes\xi)\cdot(\eta\otimes y) \\ & \begin{pmatrix}1&\\&-1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&\\&1\end{pmatrix}(\eta\otimes y)-\eta\otimes x \\ & & -1 \end{pmatrix}
$$

$$
=\begin{pmatrix} 1 & \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\otimes\xi+\left(\begin{pmatrix}1&\\&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right)\otimes\xi & i+\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right)\cdot(\eta\otimes\xi) \\ & \begin{pmatrix}1&\\&-1\end{pmatrix} & \eta\otimes\left(\begin{pmatrix}1&\\&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right)-\eta\otimes\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \\ & & -1 \end{pmatrix}
$$

$$
=\begin{pmatrix} 1 & \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\otimes\xi & i+1 \\ & \begin{pmatrix}1&\\&-1\end{pmatrix} & \eta\otimes\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} \\ & & -1 \end{pmatrix},
$$

即有 $AB = BA$.

但是

$$A^{\#}B=\begin{pmatrix}-1 & y\otimes\xi & -i\\ & \begin{pmatrix}1 & \\ & -1\end{pmatrix} & \eta\otimes x\\ & & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & y\otimes\xi & 0\\ & \begin{pmatrix}1 & \\ & 1\end{pmatrix} & \eta\otimes x\\ & & 1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-1 & -y\otimes\xi+(y\otimes\xi)\begin{pmatrix}1 & \\ & 1\end{pmatrix} & (y\otimes\xi)\cdot(\eta\otimes x)-i\\ & \begin{pmatrix}1 & \\ & -1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1 & \\ & -1\end{pmatrix}(\eta\otimes x)+\eta\otimes x\\ & & 1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-1 & -y\otimes(\begin{pmatrix}1 & \\ & 1\end{pmatrix}\cdot y)\otimes\xi & (\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix})\cdot(\eta\otimes\xi)-i\\ & \begin{pmatrix}1 & \\ & -1\end{pmatrix} & \eta\otimes(\begin{pmatrix}1 & \\ & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix})+\eta\otimes\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\\ & & 1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-1 & 0\otimes\xi & -i\\ & \begin{pmatrix}1 & \\ & -1\end{pmatrix} & \eta\otimes 0\\ & & 1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-1 & & -i\\ & \begin{pmatrix}1 & \\ & -1\end{pmatrix} & \\ & & 1\end{pmatrix},$$

$$BA^{\#}=\begin{pmatrix}1 & y\otimes\xi & 0\\ & \begin{pmatrix}1 & \\ & 1\end{pmatrix} & \eta\otimes x\\ & & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & y\otimes\xi & -i\\ & \begin{pmatrix}1 & \\ & -1\end{pmatrix} & \eta\otimes x\\ & & 1\end{pmatrix}$$

$$
= \begin{pmatrix} -1 & y\otimes\xi + (y\otimes\xi)\begin{pmatrix}1 & \\ & -1\end{pmatrix} & -i + (y\otimes\xi)\cdot(\eta\otimes x) \\ & \begin{pmatrix}1 & \\ & -1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1 & \\ & 1\end{pmatrix}(\eta\otimes x) + \eta\otimes x \\ & & 1 \end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix} -1 & \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\otimes\xi + \left(\begin{pmatrix}1 & \\ & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right)\otimes\xi & -i + \left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right)\cdot(\eta\otimes\xi) \\ & \begin{pmatrix}1 & \\ & -1\end{pmatrix} & \eta\otimes\left(\begin{pmatrix}1 & \\ & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right) + \eta\otimes\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \\ & & 1 \end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix} -1 & \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}\otimes\xi & -i \\ & \begin{pmatrix}1 & \\ & -1\end{pmatrix} & \eta\otimes\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix} \\ & & 1 \end{pmatrix},
$$

所以 $AA^{\#}B \neq BA^{\#}$.

4. 定理及其证明

有下面几个结论.

定理 8.2 若$\prod_k$ 空间上的正规算子 A 无零性不变子空间,则对$\prod_k$ 空间上的任意与 A 可交换的有界线性算子 B,必有 $A^{\#}B = BA^{\#}$.

证明 令 $A = A_1 + iA_2$,A_1 与 A_2 都是自共轭算子,由 A 是正规算子知 A_1 与 A_2 可交换. 根据可交换的自共轭算子组必有公共的 k 维半负不变子空间知道,A_1 与 A_2 有公共 k 维半负不变子空间,设之为 L,而 $A^{\#} = A_1 - iA_2$,所以 L 是 A 与 $A^{\#}$ 的公共 k 维半负不变子空间. 于是 L 是 A 的约化子空间. 进而零性子空间 $Z = L \cap L^{\perp}$ 是 A 的不变子空间,由假设 $Z = \{0\}$. 这样 L 是 A 的 k 维负的约化子空间. 将 L 改记为 H_-,$L^{\perp}$ 改记为 H_+. 于是得到$\prod_k$ 空间上的正则分解$\prod_k = H_- \oplus H_+$. 设 A 在该分解下按引理 8.2 的意义表示为

$$
A = \begin{pmatrix} A_{11} & \\ & A_{22} \end{pmatrix},
$$

A 的共轭算子为

$$A^{\#} = \begin{pmatrix} A_{11}^* & \\ & A_{22}^* \end{pmatrix}.$$

再由 A 是正规算子有

$$A_{11}A_{11}^* = A_{11}^*A_{11}, A_{22}A_{22}^* = A_{22}^*A_{22}.$$

现在设$\prod_k$空间上的任意有界线性算子 B 按引理 8.2 相对于$\prod_k$空间上的上述分解表示为

$$B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}.$$

若 $AB = BA$，则有

$$AB = \begin{pmatrix} A_{11}B_{11} & A_{11}B_{12} \\ A_{22}B_{21} & A_{22}B_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_{11}A_{11} & B_{12}A_{22} \\ B_{21}A_{11} & B_{22}A_{22} \end{pmatrix} = BA.$$

于是有

$$A_{11}B_{11} = B_{11}A_{11}, A_{22}B_{22} = B_{22}A_{22},$$

$$A_{11}B_{12} = B_{12}A_{22}, A_{22}B_{21} = B_{21}A_{11}.$$

而 $A^{\#}B = BA^{\#}$ 的等价条件是：

$$A_{11}^*B_{11} = B_{11}A_{11}^*, A_{22}^*B_{22} = B_{22}A_{22}^*,$$

$$A_{11}^*B_{12} = B_{12}A_{22}^*, A_{22}^*B_{21} = B_{21}A_{11}^*.$$

这样要证明定理只要由正规条件与交换性条件推出上述有关结论的条件即可. 结论中的前两个等式由正规条件、交换性条件中前两个等式及 Hilbert 空间上的 P-F 定理即得. 而结论中的后两个等式由正规条件、交换性条件中后两个等式及 Hilbert 空间上推广的 P-F 定理便可得到. 于是定理得证.

推论 1　设 A 为$\prod_k$空间上的正规算子，$A = A_1 + iA_2$，这里 A_1 与 A_2 是自共轭算子. 如果下列条件之一成立，则对任意与 A 可交换的有界线性算子 B，必有 $A^{\#}B = BA^{\#}$.

(1)A 有不变子空间偶对.

(2)A 是基本约化的.

(3)A_1 与 A_2 都是基本约化的.

(4)A 的临界点都是完全正则的.

(5)A_1 与 A_2 的临界点都是完全正则的.

证明 由定理 8.2 及文献[53]中定理 5 立得.

定理 8.3 设 A 是$\prod_k$ 空间上有零性不变子空间的正规算子,若 B 是$\prod_k$ 空间上与 A 无公共零性不变子空间且与 A 可交换的任意有界线性算子,则必有 $A^\# B = BA^\#$.

证明 设$\mathcal{A}$是$\prod_k$ 空间上单位算子及 A 和 B 所生成的一致闭对称算子代数,由定理条件知$\mathcal{A}$是$\prod_k$ 空间上非退化的一致闭对称算子代数(一致闭指按算子范数拓扑是闭的),进而$\mathcal{A}$是一个 C^*-代数. 再由引理 8.3 便知结论成立.

当 A 与 B 有公共零性不变子空间时,就$\prod_1$ 空间上的算子来考虑相类似的问题. 由引理 8.4 可将 A 与 B 放在同一类算子代数中进行讨论.

利用下面 Shulman 关于$\prod_1$ 空间上的算子代数的分类形式进行讨论:

(1)0 类:$\left\{\begin{pmatrix}\lambda & & \\ & \lambda I_H M & \\ & & \lambda\end{pmatrix}:\lambda\in\mathbf{C},M\in\mathcal{U}\right\}$,

其中 I_H 是 H 上的单位算子,且 $I_H\notin\mathcal{U}$,$\mathcal{U}$是 H 上的单位算子代数.

(2)II_a、II_b、III_a 和 III_b 类分别是

$$\left\{\begin{pmatrix}\lambda & & \\ & M & \\ & & \lambda\end{pmatrix}:\lambda\in\mathbf{C},M\in\mathcal{U}\right\},$$

$$\left\{\begin{pmatrix}\lambda & y\otimes\xi & t \\ & M & \eta\otimes z \\ & & \lambda\end{pmatrix}:\lambda,t\in\mathbf{C},M\in\mathcal{U},y,z\in R\right\},$$

$$\left\{\begin{pmatrix}\lambda & & \\ & M & \\ & & \mu\end{pmatrix}:\lambda,\mu\in\mathbf{C},M\in\mathcal{U}\right\},$$

$$\left\{\begin{pmatrix}\lambda & y\otimes\xi & t \\ & M & \eta\otimes z \\ & & \mu\end{pmatrix}:\lambda,\mu,t\in\mathbf{C},M\in\mathcal{U},y,z\in R\right\}$$

这里 R 是 H 中对 $\mathcal{U}$ 不变的子空间，且 $I_H \in \mathcal{U}$.

(3) Ⅰ 类：

$$\left\{\begin{pmatrix} \lambda & (q(M^*)+y+Pu)\otimes\xi & t \\ & \lambda I_H + M & \eta\otimes(q(M)+z+u) \\ & & \lambda \end{pmatrix} : \lambda, t \in \mathbf{C}, M \in \mathcal{U}, y, z \in R, u \in D\right\},$$

其中 $I_H \notin \mathcal{U}$，q 是 $\mathcal{U}$ 到 H 的线性映射. R 是 H 中直交于 $q(\mathcal{U})$ 且对 $\mathcal{U}$ 不变的子空间，D 是 $\mathrm{Ker}(\mathcal{U})$ 中直交于 R 的线性流形. P 是 D 上共轭线性算子，且 $P^2 = I_D$，于是得到下面的结果.

定理 8.4 设 A 与 B 是 $\prod_1$ 空间上有公共零性不变子空间的算子，且 A 是正规算子，B 与 A 可交换，令 $\mathcal{A}$ 是由 A，B 及单位算子生成的弱闭的对称算子代数. 若 $\mathcal{A}$ 属于第 0、Ⅱ_a 和 Ⅲ_a 类代数，则必有 $A^\# B = BA^\#$.

证明 只就 $\mathcal{A}$ 属于第 Ⅲ_a 类代数证明，其他两种情况类似. 设 A 与 B 分别有下述形式：

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & & \\ & M & \\ & & \mu \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} \lambda' & & \\ & M' & \\ & & \mu' \end{pmatrix},$$

其中 $\lambda, \mu, \lambda', \mu' \in \mathbf{C}$，$M$ 与 M' 是 Hilbert 空间上的有界线性算子. 则 A 的共轭算子为

$$A^\# = \begin{pmatrix} \bar{\lambda} & & \\ & M^* & \\ & & \bar{\mu} \end{pmatrix},$$

其中 M^* 是 M 关于正定内积的共轭. 由 A 的正规性有 $MM^* = M^* M$. 于是由 Hilbert 空间上的 P-F 定理有 $M^* M' = M'M^*$. 因此有 $A^\# B = BA^\#$.

如果 $\prod_1$ 空间上的正规算子 A 与和 A 可交换的算子 B 有公共零性不变子空间，并且 A、B 及单位算子生成的弱闭对称算子代数属于第 Ⅰ、Ⅱ_b 或 Ⅲ_b 类代数，则前面的例 8.2 与下面的例 8.3 及注说明了 B 与 $A^\#$ 一般不可交换.

例 8.3 取 $\prod_1$ 空间上的第 Ⅱ_b 类算子代数中的算子 A 和 B 与下：

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x\otimes\xi & 0 \\ & \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix} & \eta\otimes y \\ & & 1 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & x' \otimes \xi & 0 \\ & \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix} & \eta \otimes y' \\ & & 1 \end{pmatrix},$$

其中 $x = \begin{pmatrix} \sqrt{2}+i \\ i \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$, $x' = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ i \end{pmatrix}$, $y' = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$,则

$$A^{\#} = \begin{pmatrix} 1 & y \otimes \xi & 0 \\ & \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix} & \eta \otimes x \\ & & 1 \end{pmatrix}.$$

首先 A 是正规算子,因为

$$AA^{\#} = \begin{pmatrix} 1 & x \otimes \xi & 0 \\ & \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix} & \eta \otimes y \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & y \otimes \xi & 0 \\ & \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix} & \eta \otimes x \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & \begin{pmatrix} \sqrt{2}+i \\ i \end{pmatrix} \otimes \xi & 2 \\ & \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix} & \eta \otimes \begin{pmatrix} \sqrt{2}+i \\ i \end{pmatrix} \\ & & 1 \end{pmatrix},$$

$$A^{\#} A = \begin{pmatrix} 1 & y \otimes \xi & 0 \\ & \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix} & \eta \otimes x \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x \otimes \xi & 0 \\ & \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix} & \eta \otimes y \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

$$
= \begin{pmatrix} 1 & \begin{pmatrix} \sqrt{2}+i \\ i \end{pmatrix} \otimes \xi & 2 \\ & \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix} & \eta \otimes \begin{pmatrix} \sqrt{2}+i \\ i \end{pmatrix} \\ & & 1 \end{pmatrix},
$$

其次 B 与 A 可交换. 因为

$$
AB = \begin{pmatrix} 1 & x \otimes \xi & 0 \\ & \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix} & \eta \otimes y \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x' \otimes \xi & 0 \\ & \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix} & \eta \otimes y' \\ & & 1 \end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix} 1 & \begin{pmatrix} (\sqrt{2}+1)i \\ 1+i \end{pmatrix} \otimes \xi & 2i \\ & \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix} & \eta \otimes \begin{pmatrix} \sqrt{2}+1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ & & 1 \end{pmatrix},
$$

$$
BA = \begin{pmatrix} 1 & x' \otimes \xi & 0 \\ & \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix} & \eta \otimes y' \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x \otimes \xi & 0 \\ & \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix} & \eta \otimes y \\ & & 1 \end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix} 1 & \begin{pmatrix} (\sqrt{2}+1)i \\ 1+i \end{pmatrix} \otimes \xi & 2i \\ & \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix} & \eta \otimes \begin{pmatrix} \sqrt{2}+1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ & & 1 \end{pmatrix}.
$$

最后看 $A^{\#}B$ 与 $BA^{\#}$.

$$A^{\#}B=\begin{pmatrix}1 & y\otimes\xi & 0\\ & \begin{pmatrix}1 & \\ & 1\end{pmatrix} & \eta\otimes x\\ & & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & x'\otimes\xi & 0\\ & \begin{pmatrix}1 & \\ & 1\end{pmatrix} & \eta\otimes y'\\ & & 1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1 & \begin{pmatrix}\sqrt{2}(1+i)\\ 1\end{pmatrix}\otimes\xi & \sqrt{2}\\ & \begin{pmatrix}1 & \\ & 1\end{pmatrix} & \eta\otimes\begin{pmatrix}1+i\\ 1+i\end{pmatrix}\\ & & 1\end{pmatrix},$$

$$BA^{\#}=\begin{pmatrix}1 & x'\otimes\xi & 0\\ & \begin{pmatrix}1 & \\ & 1\end{pmatrix} & \eta\otimes y'\\ & & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & y\otimes\xi & 0\\ & \begin{pmatrix}1 & \\ & 1\end{pmatrix} & \eta\otimes x\\ & & 1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1 & \begin{pmatrix}\sqrt{2}(1+i)\\ 1\end{pmatrix}\otimes\xi & i-\sqrt{2}\\ & \begin{pmatrix}1 & \\ & 1\end{pmatrix} & \eta\otimes\begin{pmatrix}1+i\\ 1+i\end{pmatrix}\\ & & 1\end{pmatrix}.$$

所以 B 与 $A^{\#}$ 不可交换.

注:此例同时说明在第 Ⅰ 类算子代数中也存在正规算子 A 及与 A 可交换的算子 B,使得 B 与 $A^{\#}$ 不可交换.

推论 2 对于$\prod_1$ 空间上的一般算子代数$\mathcal{A}$,有下列结论:

(1) 若$\mathcal{A}$属于第 0、II_a 或 III_a 类代数,则$\mathcal{A}$的二次交换$\mathcal{A}''=\mathcal{A}$.

(2) 若$\mathcal{A}$属于第 Ⅰ、II_b 或 III_b 类代数,则$\mathcal{A}$的二次交换$\mathcal{A}''\neq\mathcal{A}$.

证明 (1) 对第 0、II_a 或 III_a 类代数$\mathcal{A}$有$\mathcal{A}=J\mathcal{A}J$. 再由 Hilbert 空间上 Von Neumann 代数的二次交换定理有

$$\mathcal{A}''=(J\mathcal{A}J)''=J\mathcal{A}J=\mathcal{A}.$$

(2) 由例 8.2、8.3 及注便知$\mathcal{A}''\neq\mathcal{A}$.

最后，当$\mathcal{A}$属于第 Ⅰ、Ⅱ$_b$ 或 Ⅲ$_b$ 类代数时，给出 B 与 A^* 可交换的充分条件.

定理 8.5　设$\mathcal{A}$是$\prod_1$ 空间上的一般的弱闭对称算子代数，$A,B \in \mathcal{A}$，A 是正规算子，B 与 A 可交换.

(1) 令$\mathcal{A}$是第 Ⅲ$_b$ 类的，且

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & y \otimes \xi & t \\ & M & \eta \otimes z \\ & & \mu \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} \lambda' & y' \otimes \xi & t' \\ & M' & \eta \otimes z' \\ & & \mu' \end{pmatrix},$$

则当下列条件成立时，B 与 $A^\#$ 可交换.

①$y', z' \in span\{y, z\}^\perp$，$\|y\| = \|z\|$，$y = \alpha z$；

②$y', z' \in ker(\lambda I - M^*) \cap ker(\mu I - M)$.

(2) 令$\mathcal{A}$是第 Ⅱ$_b$ 类的，且

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & y \otimes \xi & t \\ & M & \eta \otimes z \\ & & \lambda \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} \lambda' & y' \otimes \xi & t' \\ & M' & \eta \otimes z' \\ & & \lambda' \end{pmatrix},$$

则当下列条件成立时，B 与 $A^\#$ 可交换.

①$y', z' \in span\{y, z\}^\perp$，$\|y\| = \|z\|$，$y = \alpha z$；

②$y', z' \in ker(\lambda I - M^*) \cap ker(\lambda I - M)$.

(3) 令$\mathcal{A}$是第 Ⅰ 类的，且

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & (q(M^*) + y + Pu) \otimes \xi & t \\ & \lambda I_H + M & \eta \otimes (q(M) + z + u) \\ & & \lambda \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} \lambda' & (q(M^*)+y'+Pu')\otimes\xi & t' \\ & \lambda' I_H + M' & \eta\otimes(q(M')+z'+u') \\ & & \lambda' \end{pmatrix},$$

令

$$Y = q(M^*)+y+Pu,$$

$$Z = q(M)+z+u,$$

$$Y' = q(M^{*\prime})+y'+Pu',$$

$$Z' = q(M')+z'+u',$$

则当下列条件成立时,B 与 $A^{\#}$ 可交换.

①$y', z' \in span\ \{y,z\}^{\perp}, \|y\| = \|z\|, y = \alpha z$,

②$Y', Z' \in kerM \cap kerM^*$.

证明 (2) 与(3) 的证明蕴涵于(1) 的证明中,所以只就情况(1) 加以证明. A 的共轭算子为

$$A^{\#} = \begin{pmatrix} \overline{\mu} & z\otimes\xi & \overline{t} \\ & M^* & \eta\otimes y \\ & & \overline{\lambda} \end{pmatrix}.$$

由 $AA^{\#} = A^{\#}A$,有

$$\begin{pmatrix} \lambda\overline{\mu} & (\overline{\lambda}z+My)\otimes\xi & \lambda\overline{t}+\overline{\lambda}t+(y,y) \\ & MM^* & \eta\otimes(\overline{\lambda}z+My) \\ & & \mu\overline{\lambda} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \overline{\mu}\lambda & (\mu y+M^*z)\otimes\xi & \overline{\mu}t+\mu\overline{t}+(z,z) \\ & MM^* & \eta\otimes(\mu y+M^*z) \\ & & \overline{\lambda}\mu \end{pmatrix}$$

从而算子 A 是正规的,等价于下述一组条件(正规性条件):

$$MM^* = M^*M,$$

$$(\lambda-\mu)\overline{t}+(y,y) = (\overline{\mu}-\overline{\lambda})t+(z,z),$$

$$(\bar{\lambda}I - M^*)z = (\mu I - M)y,$$

由 $AB = BA$ 得，

$$\begin{pmatrix} \lambda\lambda' & (\bar{\lambda}y' + M'^* y)\otimes\xi & \lambda t' + \mu' t + (z', y) \\ & MM' & \eta\otimes(\mu z + Mz') \\ & & \mu\mu' \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda'\lambda & (\bar{\lambda}' y + M^* y')\otimes\xi & \lambda' t + \mu t' + (z, y') \\ & M'M & \eta\otimes(\mu z' + M'z) \\ & & \mu'\mu \end{pmatrix}$$

从而 B 与 A 可交换等价于下述条件(交换性条件)：

$$MM' = M'M;$$

$$(\lambda - \mu)t' + (z', y) = (\lambda' - \mu')t + (z, y');$$

$$(\bar{\lambda}I - M^*)y' = (\bar{\lambda}I - M'^*)y';$$

$$(\mu' I - M')Z = (\mu I - M)z'.$$

下面计算 $A^{\#}B = BA^{\#}$. 计算

$$A^{\#}B = \begin{pmatrix} \bar{\mu}\lambda'(\mu y' + M'^* z)\otimes\xi & \bar{\mu}t' + \bar{t}\mu' + (z', z) \\ M^* M' & \eta\otimes(\bar{\mu}' y + M^* z') \\ & \bar{\lambda}\mu' \end{pmatrix}$$

$$BA^{\#} = \begin{pmatrix} \lambda'\bar{\mu} & (\bar{\lambda}' z + My')\otimes\xi & \lambda'\bar{t} + \bar{\lambda}t' + (y, y') \\ & M'M^* & \eta\otimes(\bar{\lambda}z' + M'y) \\ & & \mu'\bar{\lambda} \end{pmatrix}$$

这样 $A^{\#}B = BA^{\#}$ 等价于下面的条件(结论条件)：

$$M^* M' = M'M^*;$$

$$(\lambda' - \mu')\bar{t} + (y, y') = (\bar{\mu} - \bar{\lambda})t' + (z, z'),$$

$$(\mu I - M)y' = (\bar{\lambda}' I - M'^*)z;$$

$$(\mu' I - M)y = (\bar{\lambda}' I - M'^*)z'.$$

接下来证明由正规性条件和交换性条件可以推出结论条件. 结论条件中的第一个等式由正规性条件与交换性条件的第一个等式及 Hilbert 空间上的 P-F 定理得到. 由 $y',z' \in span\{y.z\}^{\perp}$,及正规性条件、交换性条件、结论条件中的第二个不等式分别变为:

$$(\lambda-\mu)\bar{t}=(-\bar{\lambda}+\bar{\mu})t,$$

$$(\lambda-\mu)t'=(\lambda'-\mu')t,$$

$$(\lambda'-\mu')\bar{t}=(\bar{\mu}-\bar{\lambda})t',$$

这里由前两个等式显然可推出第三个等式,再利用条件

$$y',z' \in ker(\bar{\lambda}I-M^{*}) \cap ker(\mu I-M),$$

交换性条件与结论条件中的最后两个等式相应地变为:

$$(\bar{\lambda}I-M'^{*})y=0$$

$$(\mu' I-M')z=0 \qquad (^{*})$$

与

$$(\bar{\lambda}I-M'^{*})z=0$$

$$(\mu' I-M')y=0 \qquad (^{**})$$

再由条件 $y=az$,及条件(*)便可推出条件(**).

推论 3 若$\prod_1$ 空间上的正规算子 A 相对于$\prod_1$ 空间的正规分解

$$\prod\nolimits_1=(Z\oplus H)+Z^{*}$$

具有形式

$$A=\begin{pmatrix}\lambda & & \\ & M & \\ & & \mu\end{pmatrix},$$

其中 $\lambda,\mu \in \mathbf{C}$,$M$ 是 Hilbert 空间 H 上有界算子. 而与 A 可交换的算子 B 相对于$\prod_1$ 的这个正规分解具有下述形式

$$B=\begin{pmatrix}A_{11} & A_{12} & A_{13}\\ & A_{22} & A_{23}\\ & & A_{33}\end{pmatrix},$$

则必有 $A^{\#}B = BA^{\#}$.

证明　与定理 8.5 的证明方法相仿，通过直接计算便得.

§8.3 不等式中的应用

本节给出Π空间上算子矩阵范数不等式的两个定理. 这些不等式在算子函数论中可以找到应用.

算子矩阵概念最早是在讨论 Hilbert 空间上的算子分解问题时引入的. 与此相似，由于完备不定度规空间Π本身具有各种不同的分解，因此Π空间上的算子相应地就有对应的分解. 自然地就产生了Π空间上的算子矩阵概念，它在Π空间几何理论与算子理论研究中具有重要作用. 近来在讨论Π空间上的约化理论的进一步工作时，也涉及算子矩阵，并需要研究算子矩阵的范数及其估计方面的性质. 本节就给出这方面工作的几个结果.

设Π是一个完备的Π空间. 其上的度规记为$(\cdot,\cdot)$，由该度规产生的范数记为$\|\cdot\|$，$\Pi = H_+ + H_-$ 是Π空间的正则分解，其中 H_+ 与 H_- 都是 Hilbert 空间. 它们上的内积分别为$[\cdot,\cdot]_+$ 与$[\cdot,\cdot]_-$，于是有

$$(\cdot,\cdot) = [\cdot,\cdot]_+ + [\cdot,\cdot]_-.$$

对任何 $x \in \Pi$，存在唯一的 $x^+ \in H_+$ 及 $x^- \in H_-$ 使得 $x = x^+ + x^-$. 若用$\|\cdot\|_+$ 与$\|\cdot\|_-$ 分别表示由$[\cdot,\cdot]_+$ 与$[\cdot,\cdot]_-$ 引入的范数，则还有关系式：

$$\|\cdot\|^2 = \|\cdot\|_+^2 + \|\cdot\|_-^2.$$

设$\Pi_i = H_+^{(i)} + H_-^{(i)}$ 是Π空间Π_i　$(i = 1,2)$ 的正则分解，A 是Π_1 到Π_2 的有界线性算子，则 A 按着Π_i　$(i = 1,2)$ 的正则分解有下述分解方式.

$$(1) A = (A_1, A_2) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix},$$

其中 A_1、A_2 分别是算子 A 在 $H_+^{(1)}$ 与 $H_-^{(1)}$ 上的限制. 而 A_{ij} 是 A_i 按着Π_2 的正则分解所进行的自然分解$(i,j = 1,2)$，即 A_{11}，A_{12} 分别是 $H_+^{(1)}$ 到 $H_+^{(2)}$ 与 $H_-^{(2)}$ 的算子；而 A_{21}，A_{22} 分别是 $H_-^{(1)}$ 到 $H_+^{(2)}$ 与 $H_-^{(2)}$ 的算子. 于是对 $x = x^+ + x^- \in \Pi_1$ 或记 $x = \begin{pmatrix} x^+ \\ x^- \end{pmatrix}$，有

$$Ax = A_1x^+ + A_2x^-$$
$$= \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^+ \\ x^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11}x^+ + A_{21}x^- \\ A_{12}x^+ + A_{22}x^- \end{pmatrix}.$$

$$(2)A = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{21} \\ B_{12} & B_{22} \end{pmatrix},$$

其中 B_1, B_2 分别是算子 A 从$\prod_1$ 到 $H_+^{(2)}$ 与 $H_-^{(2)}$ 上的自然分解. B_{i1}, B_{i2} 分别是 B_i 在 $H_+^{(1)}$ 与 $H_-^{(2)}$ 上的限制($i = 1,2$). 对 $x = x^+ + x^- = \begin{pmatrix} x^+ \\ x^- \end{pmatrix}$有

$$Ax = B_1x + B_2x$$
$$= \begin{pmatrix} B_{11} & B_{21} \\ B_{12} & B_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^+ \\ x^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_{11}x^+ + B_{21}x^- \\ B_{12}x^+ + B_{22}x^- \end{pmatrix}.$$

注:(1) 不难证明在上述分解(1) 与(2) 中,A_{ij} 与 B_{ij} ($i,j = 1,2$)都是相应空间上的有界线性算子.

(2) 一般来说 $A_{ij} \neq B_{ij}$ ($i,j = 1,2$),但有

$$A_{11} + A_{21} = B_{11} + B_{21}$$

及

$$A_{12} + A_{22} = B_{12} + B_{22}.$$

(3) 上述分解式中的部分"+" 号及本注中的"+" 号是指形式和.

定义$\prod$空间$\prod_1 = H_+^{(1)} \oplus H_-^{(1)}$ 到$\prod_2 = H_+^{(2)} \oplus H_-^{(2)}$ 中的有界线性算子 A 的上述两种分解中,称(1) 为第一型分解,记为

$$A = (A_1, A_2) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix},$$

而称(2) 为第二型分解,记为

$$A = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{21} \\ B_{12} & B_{22} \end{pmatrix}.$$

它们都是$\prod_1$ 到$\prod_2$ 的算子矩阵.

定理 8.6　设 A 是具有正则分解的$\prod$空间$\prod_1 = H_+^{(1)} \oplus H_-^{(1)}$ 到$\prod_2 = H_+^{(2)} \oplus H_-^{(2)}$ 中的有界线性算子,并

$$A = (A_1, A_2) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix}$$

是 A 的第一型分解,则下列结论成立:

(1) $\frac{1}{2}(\|A_1\| + \|A_2\|) \leqslant \|A\| \leqslant \|A_1\| + \|A_2\|$.

(2) $\|A_1\|^2 \leqslant \|A_{11}\|^2 + \|A_{12}\|^2$.

并且等号成立的充要条件是存在点列$\{x_n^+\} \subset H_+^{(1)}$,使得

$$\|A_{11}x_n^+\| \longrightarrow \|A_{11}\|,$$

与

$$\|A_{12}x_n^+\| \longrightarrow \|A_{12}\|$$

同时成立.

(3) $\|A_2\|^2 \leqslant \|A_{21}\|^2 + \|A_{22}\|^2$.

并且等号成立的充要条件是存在点列$\{x_n^-\} \subset H_-^{(1)}$,使得$\|A_{21}x_n^-\| \longrightarrow \|A_{21}\|$与$\|A_{22}x_n^-\| \longrightarrow \|A_{22}\|$同时成立.

(4) $\frac{1}{2}(\|A_{11}\| + \|A_{12}\| + \|A_{21}\| + \|A_{22}\|)$

$$\leqslant \|A\| \leqslant \sqrt{\|A_{11}\|^2 + \|A_{12}\|^2} + \sqrt{\|A_{21}\|^2 + \|A_{22}\|^2}.$$

证明　(1) 对任意 $x \in \prod_1$,令 $x = x^+ + x^-$ 则

$$\begin{aligned} \|Ax\| &= \|A_1x^+ + A_2x^-\| \\ &\leqslant \|A_1x^+\| + \|A_2x^-\| \\ &\leqslant \|A_1\| \cdot \|x^+\| + \|A_2\| \cdot \|x^-\| \\ &\leqslant (\|A_1\| + \|A_2\|)\|x\|, \end{aligned}$$

所以

$$\|A\| \leqslant \|A_1\| + \|A_2\|.$$

另一方面，存在点列 $\{x_n^+\} \subset H_+^{(1)}$ 使得 $\|A_1 x_n^+\| \longrightarrow \|A_1\|$，现令 $x_n = x_n^+ + 0$，则有

$$\|A\| \geqslant \|Ax_n\| = \|A_1 x_n^+ + A_2 0\| = \|A_1 x_n^+\|,$$

从而有 $\|A\| \geqslant \|A_1\|$. 同理可得 $\|A\| \geqslant \|A_2\|$. 于是有

$$\|A\| \geqslant \frac{1}{2}(\|A_1\| + \|A_2\|).$$

(2) 由算子 A 的第一型分解的定义知，对任意 $x^+ \in H_+^{(1)}$ 有

$$\|A_1 x^+\|^2 = \|A_{11} x^+\|^2 + \|A_{12} x^+\|^2.$$

于是

$$\begin{aligned}\|A_1\|^2 &= \sup_{\|x^+\|=1} \|A_1 x^+\| \\ &\leqslant \sup_{\|x^+\|=1} \|A_{11} x^+\|^2 + \sup_{\|x^+\|=1} \|A_{12} x^+\|^2 \\ &= \|A_{11}\|^2 + \|A_{12}\|^2.\end{aligned}$$

若存在点列 $\{x_n^+\} \subset H_+^{(1)}$ 使 $\|A_{11} x_n^+\| \longrightarrow \|A_{11}\|$ 与 $\|A_{12} x_n^+\| \longrightarrow \|A_{12}\|$ 同时成立，则

$$\|A_1\|^2 \geqslant \|A_1 x_n^+\|^2 = \|A_{11} x_n^+\|^2 + \|A_{12} x_n^+\|^2,$$

从而

$$\|A_1\|^2 \geqslant \|A_{11}\|^2 + \|A_{12}\|^2.$$

于是

$$\|A_1\|^2 = \|A_{11}\|^2 + \|A_{12}\|^2.$$

反之，若有

$$\|A_1\|^2 = \|A_{11}\|^2 + \|A_{12}\|^2,$$

则由于存在点列 $\{x_n^+\} \subset H_+^{(1)}$ 使 $\|A_1 x_n^+\| \longrightarrow \|A_1\|$，同时又有

$$\|A_1 x_n^+\|^2 = \|A_{11} x_n^+\|^2 + \|A_{12} x_n^+\|^2.$$

因此，

$$\|A_{11} x_n^+\|^2 + \|A_{12} x_n^+\|^2 \longrightarrow \|A_{11}\|^2 + \|A_{12}\|^2 \ (n \longrightarrow \infty).$$

又因对任意 $x^+ \subset H_+^{(1)}$ 有

$$\|A_{11}x^+\| \leqslant \|A_{11}\|, \|A_{11}x^+\| \leqslant \|A_{12}\|,$$

所以必存在子列 $\{x_{nk}^+\}$，不妨设为 $\{x_n^+\}$，使

$$\|A_{11}x_n^+\| \longrightarrow \|A_{11}\|$$

与

$$\|A_{12}x_n^+\| \longrightarrow \|A_{12}\|$$

同时成立.

(3) 与(1) 的证明相似.

(4) 由(1)、(2)、(3) 立得.

定理 8.7　设 A 是从具有正则分解的$\prod$空间

$$\prod\nolimits_1 = H_+^{(1)} \oplus H_-^{(1)}$$

到

$$\prod\nolimits_2 = H_+^{(2)} \oplus H_-^{(2)}$$

中的有界线性算子，并且

$$A = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{21} \\ B_{12} & B_{22} \end{pmatrix}$$

是 A 的第二型分解，则下列结论成立：

(1) $\|A\|^2 \leqslant \|B_1\|^2 + \|B_2\|^2$.

等号成立的充要条件是存在点列 $\{x_n\} \subset \prod_1$，使得 $\|B_1 x_n\| \longrightarrow \|B_1\|$ 与 $\|B_2 x_n\| \longrightarrow \|B_2\|$ 同时成立.

(2) $\|B_1\| \leqslant \|B_{11}\| + \|B_{21}\|$.

(3) $\|B_2\| \leqslant \|B_{12}\| + \|B_{22}\|$.

(4) $\frac{1}{2}(\|B_{11}\| + \|B_{12}\| + \|B_{21}\| + \|B_{22}\|)$

$$\leqslant \|A\| \leqslant \sqrt{(\|B_{11}\| + \|B_{12}\|)^2 + (\|B_{21}\| + \|B_{22}\|)^2}.$$

证明 (1) 与定理 8.6(2) 的证明相似.

(2)、(3) 与定理 8.6(1) 的证明相似.

(4) 由(1)、(2)、(3) 立得.

注:定理 8.6 与定理 8.7 中算子范数都是算子对于相应空间的算子范数.这里不作特殊的标记.

最后,顺便指出,定理 8.6,8.7 中给出的不等式在算子函数论也可找到应用.

§8.4 算子三角分解及应用

本节在有限维不定度规空间$\prod$上给出算子的对角分解与三角分解的形式,并给出相应这些分解的共轭运算与乘法运算的方法与公式.

令$\prod$是一个不定内积空间,$\dim \prod = n$,度规算子为

$$J = \begin{pmatrix} -I_k & \\ & I_{n-k} \end{pmatrix},$$

这里 $0 < k < n$,I 是单位矩阵.

定理 8.8 令 A 是 n 维$\prod_k$ 空间上的算子矩阵,$A^\#$ 是 A 关于不定内积$[\cdot,\cdot]$的共轭矩阵.如果 A 与 $A^\#$ 没有公共的零性不变子空间,则存在$\prod$的下述分解:

$$\prod = H_{-1} \oplus H_+,$$

这里 H_+ 与 H_- 分别按内积$(\cdot,\cdot)$与$-[\cdot,\cdot]$成为 Hilbert 空间,并且 $\dim H_- = k$,$\dim H_+ = n-k$,使得算子矩阵 A 有下列形式:

$$A = \begin{pmatrix} A_k & \\ & A_{n-k} \end{pmatrix},$$

其中 A_k 空间 H_- 上的 $k \times k$ 矩阵,A_{n-k} 是 H_+ 空间上的$(n-k)\times(n-k)$ 矩阵,并且

$$A^\# = \begin{pmatrix} A_k^* & \\ & A_{n-k}^* \end{pmatrix}.$$

证明 通过直接运算可以验证.

定理 8.9　令 B 是 n 维 $\prod_k$ 空间上的算子矩阵，$B^{\#}$ 是算子 B 关于不定内积 $[\cdot,\cdot]$ 的共轭矩阵. 如果 B 和 $B^{\#}$ 的公共零性不变子空间的最大维数是 k，则存在 $\prod$ 的下述分解：

$$\prod = (Z \oplus H) + Z^*,$$

这里 Z 是 $\prod$ 的零性子空间，Z^* 是 Z 的偶对，使得算子矩阵 B 有下列形式：

$$B = \begin{pmatrix} B_k & z \otimes \xi & T_k \\ & B_{n-k} & \eta \otimes y \\ & & B_k' \end{pmatrix}.$$

其中 ξ 是 Z 的基，η 是 Z^* 的基，y 和 z 是 k 维向量，$z \otimes \xi$ 与 $\eta \otimes y$ 是秩不超过 k 的算子，并且有

$$B^{\#} = \begin{pmatrix} B_k'^{*} & y \otimes \xi & T_k^* \\ & B_{n-k}^* & \eta \otimes z \\ & & B_k^* \end{pmatrix}.$$

证明　通过直接运算可以验证.

定理 8.10　令 B,C 是 n 维 $\prod_k$ 空间上两个算子，并且

$$B = \begin{pmatrix} B_k & z \otimes \xi & T_k \\ & B_{n-k} & \eta \otimes y \\ & & B_k' \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} C_k & s \otimes \xi & N_k \\ & C_{n-k} & \eta \otimes r \\ & & C_k' \end{pmatrix},$$

则

$$BC = \begin{pmatrix} B_k C_k & (B_k^* s + C_{n-k}^* z) \otimes \xi & B_k N_k + (r,z) + T_k C_k' \\ & B_{n-k} C_{n-k} & \eta \otimes (B_{n-k} r + C_k' y) \\ & & B_k' C_k' \end{pmatrix}.$$

证明：直接计算便得.

例 8.4　取 $\prod$ 空间上的算子矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x \otimes \xi & i \\ & \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix} & \eta \otimes y \\ & & -1 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & y \otimes \xi & 0 \\ & \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix} & \eta \otimes x \\ & & 1 \end{pmatrix},$$

$$x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

则 A 是一个正规算子,因为 $A^{\#}A = AA^{\#}$,并且有

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \xi & i+1 \\ & \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix} & \eta \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ & & -1 \end{pmatrix},$$

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \xi & i+1 \\ & \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix} & \eta \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ & & -1 \end{pmatrix}.$$

即 $AB = BA$. 但是有

$$A^{\#}B = \begin{pmatrix} -1 & & -i \\ & \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix} & \\ & & 1 \end{pmatrix},$$

$$BA^{\#} = \begin{pmatrix} -1 & \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \xi & & -i \\ & \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix} & & \eta \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \\ & & & 1 \end{pmatrix},$$

即 $A^{\#}B \neq BA^{\#}$.

第九章

条件正定与扩张

本章首先讨论条件正定型与扩张问题，得到了Pontrjagin空间上对称算子的扩张定理. 其次讨论半群上条件正定函数的扩张问题，得到了一个扩张定理. 作为应用，讨论了半群上条件正定函数的闭扩张与有界扩张问题，并证明了Pontrjagin空间上量子力学的一个基本定理.

§9.1 引言

本节简要说明条件正定型的由来.

Hilbert 空间上的二次型理论与算子的扩张问题是现代数学物理方法的基本内容之一，而且两者密切相关. 在讨论 Hilbert空间上算子的相关问题时，由于内积是正定的，因此往往与正定型相联系，并已获得一系列成果. 近年来，受广义相对论及量子物理学发展的影响，在以正定内积为基础的 Hilbert空间框架下研究问题的方法已受到限制. 取而代之的是在具有不定内积的 Pontrjagin 空间上考虑问题. 随之 Hilbert 空间上的一些经典问题也开始在 Pontrjagin 空间上讨论. 条件正定型与条件正定函数的概念在此背景下产生了，与之相关的问题也有了一些讨论. 但由于在 Pontrjagin 空间上的条件正定型与 Hilbert 空间上的正定型是有本质区别的，Pontrjagin 空间上范数与不定内积的关系较 Hilbert 空间上的情况复杂得多，不可能将 Hilbert 空间中的结果，直接搬到 Pontrjagin 空间中来，同时也受 Pontrjagin 空间本身性质研究的制约，因此条件正定型和 Potrjagin 空间上算子的扩张以及条件正定函数的扩张等有关问题的研究多年来一直进展缓慢.

本章的目的是讨论条件正定型与扩张问题，半群上条件正定函数的扩张问题. 得到了 Pontrjagin 空间上对称算子的扩张定理，得到了半群上条件正定函数的扩张定理. 作为主要结果与方法的应用，讨论了半群上条件正定函数的闭扩张和有界扩张的问题，并证明了基于 Potrjagin 空间中量子力学的基本定理.

为了与 Hilbert 空间空间上的内容相联系与比较，本章把 Pontrjagin 空间上的不定内积仍然用圆括弧表示，即用$(\cdot,\cdot)$表示，而正定内积用方括弧$[\cdot,\cdot]$表示.

§9.2 条件正定型与扩张定理

本节给出条件正定型的概念，给出条件正定型及可闭的条件. 最后证明条件正定型的扩张定理.

假定所有线性空间都是复的. 令 H,K 是两个 Hilbert 空间, $T:D(T)\longrightarrow K$ 是线性映射, $D(T)$ 是 H 的线性子空间. 称 T 是可闭的, 若对每个点列 $x_n\in D(T)$, $x_n\longrightarrow 0$, 且 $\|T(x_n-x_m)\|\longrightarrow 0$, 则有 $Tx_n\longrightarrow 0$. 称 T 是闭的, 若对每个点列 $x_n\in D(T)$, $x_n\longrightarrow x$, 且 $\|T(x_n-x_m)\|\longrightarrow 0$, 则有 $x\in D(T)$, 且 $Tx_n\longrightarrow Tx$.

定义 9.1　令 X 是一个线性赋范空间. 映射 $p:X\times X\longrightarrow C$ 对第一个变元是线性的, 对第二个变元是共轭线性的. 称 p 是条件正定型, 如果存在一个直和分解

$$X=X_+ + X_-,$$

这里 X_+ 是闭的, X_- 是有限维子空间, 且满足

$$p(x_+,x_+)\geqslant 0;\ p(x_-,x_-)\leqslant 0;\ p(x_+,x_-)=0,$$

对任何 $x_+\in X_+$, $x_-\in X_-$ 成立.

如果 p 是 X 上的一个条件正定型, 则集

$$N_p=\{x\in X\mid p(x,y)=0,\forall\, y\in X\}$$

是一个线性子空间.

不难看出, 定义 9.1 中 X 的分解形式不唯一, 而在模 N_p 的意义下才唯一, 而且 N_p 的任意子空间可随意处于 X_+ 与 X_- 之间的任意一个.

商空间 X/N_p 有一个自然的不定内积

$$(x+N_p,y+N_p)=p(x,y),\ x,y\in X.$$

相应于这个不定内积, 可以得到一个正定内积

$$[x+N_p,y+N_p]=p(x_+,y_+)-p(x_-,y_-),$$

其中 $x_\pm\in X_\pm$, $y_\pm\in X_\pm$, $x=x_+ + x_-$, $y=y_+ + y_-$.

将 X/N_p 按着内积 $[\cdot,\cdot]$ 完备化, 所得到的 Pontrjagin 空间记为 X_p.

如果 p 是条件正定的, 则它的模

$$|p|(x,y)=p(x_+,y_+)-p(x_-,y_-)$$

是正定型, 其中 $x_\pm\in X_\pm$, $y_\pm\in X_\pm$, $x=x_+ + x_-$, $y=y_+ + y_-$. 显然有 $N_p=N_{|p|}$.

令 X 是一个线性空间, p,q 是 X 上的两个条件正定型, 且 $N_q\subset N_p$, 则映射 $\tilde{p}:X/N_q\times X/N_q\longrightarrow C$,

$$\tilde{p}(x+N_q, y+N_q) = p(x,y), x, y \in X,$$

是 X/N_q 上的条件正定型. 并且 Pontrjagin 空间 X_p 与 $(X/N_q)_{\tilde{p}}$ 是同构的. 事实上,由 $N_q \subset N_p$ 知 $\tilde{p}$ 有定义,且显然是条件正定的. 若 $x, y \in X$,则有

$$\begin{aligned}&(x+N_p, y+N_p)\\&= p(x,y) = \tilde{p}(x+N_q, y+N_q)\\&= ((x+N_q)+N_{\tilde{p}}, (y+N_q)+N_{\tilde{p}}).\end{aligned}$$

所以映射 $U:(X/N_q)/N_{\tilde{p}} \longrightarrow X/N_p$,

$$U((x+N_q)+N_{\tilde{p}}) = x+N_p, x \in X$$

显然既是单射又是满射. 于是 U 可以扩张成 $(X/N_q)_{\tilde{p}}$ 到 X_p 上的同构映射.

为了方便,以下提到的 p 是 Pontrjagin 空间$\prod$的稠密子空间 M 上的条件正定型,是指 M 关于条件正定型 p 定义中的分解与$\prod$的某个正则分解一致.

令 M 是 Pontrjagin 空间$\prod$的稠密子空间,M 上的条件正定型 p 称为是可闭的,如果对每个点列

$$x_n \in M, x_n \longrightarrow 0, p(x_n - x_m, x_n - x_m) \longrightarrow 0,$$

则有 $p(x_n, x_n) \longrightarrow 0$. 显然,若 $x_n \longrightarrow 0$,则 $p(x_n, x_n) \longrightarrow 0$,当且仅当 $|p|(x_n, x_n) \longrightarrow 0$. 于是有

推论 1　设 p 是条件正定型,则 p 可闭,当且仅当 $|p|$ 可闭.

推论 2　设 p 是 Pontrjagin 空间$\prod$的稠密子空间 M 上的条件正定型,并设 $\widetilde{M}$ 是 M 按不定内积

$$(x,y)_{+1} = (x,y) + p(x,y), x, y \in M$$

导出的正定内积$[\cdot,\cdot]_{+1}$确定的范数$\|\cdot\|_{+1}$的完备化. 则存在 $\widetilde{M}$ 上的闭条件正定型 $\tilde{p}$ 是 p 的扩张. 并且 M_p 可以等距地嵌入到$\widetilde{M}_{\tilde{p}}$中. 进而 p 是可闭的,当且仅当 $\widetilde{M}$ 可以(单映)嵌入到$\prod$中.

证明　设 $x \in \widetilde{M}$,则存在点列 $x_n \in M$,使$\|x_n - x\|_{+1} \longrightarrow 0$,又有

$$\begin{aligned}&|p(x_n, x_n) - p(x_m, x_m)|\\&= |p(x_{n+}, x_{n+}) + p(x_{n-}, x_{n-}) - p(x_{m+}, x_{m+}) - p(x_{m-}, x_{m-})|\end{aligned}$$

$$\leqslant |p(x_{n+},x_{n+})-p(x_{m+},x_{m+})|+|p(x_{n-},x_{n-})-p(x_{m-},x_{m-})|$$

$$\leqslant p(x_{n+}-x_{m+},x_{n+}-x_{m+})^{\frac{1}{2}}[p(x_{n+},x_{n+})^{\frac{1}{2}}+p(x_{m+},x_{m+})^{\frac{1}{2}}]$$

$$+|p(x_{n-}-x_{m-},x_{n-}-x_{m-})|^{\frac{1}{2}}[|p(x_{n-},x_{n-})|^{\frac{1}{2}}+|p(x_{m-},x_{m-})|^{\frac{1}{2}}].$$

而由

$$\|x\|_{+1}=[x,x]_{+1}^{\frac{1}{2}}$$

$$=[(x_+,x_+)-(x_-,x_-)+p(x_+,x_+)-p(x_-,x_-)]^{\frac{1}{2}},$$

知

$$p(x_{n+},x_{n+})\leqslant \|x_{n+}\|_{+1}^2,$$

$$|p(x_{n-},x_{n-})|\leqslant \|x_{n-}\|_{+1}^2,$$

从而有

$$p(x_{n+}-x_{m+},x_{n+}-x_{m+})\leqslant \|x_{n+}-x_{m+}\|_{+1}^2,$$

$$|p(x_{n-}-x_{m-},x_{n-}-x_{m-})|\leqslant \|x_{n-}-x_{m-}\|_{+1}^2.$$

所以由

$$\|x_{n+}-x_{m+}\|_{+1}\longrightarrow 0,$$

及

$$\|x_{n-}-x_{m-}\|_{+1}\longrightarrow 0,$$

知 $p(x_n,x_n)$ 是收敛的. 再联系前有关不等式还知道 $p(x_{n+},x_{n+})$ 与 $p(x_{n-},x_{n-})$ 也是收敛的. 现在定义 $\tilde{p}:\widetilde{M}\times\widetilde{M}\longrightarrow C$ 为

$$\tilde{p}(x,x)=\lim p(x_n,x_n),x\in\widetilde{M},$$

则 $\tilde{p}$ 是 p 的扩张且条件正定,并且 $\tilde{p}$ 显然是闭的.

由于对任何 $x\in M,p(x,x)=\tilde{p}(x,x)$,从而有

$$p(x_+,x_+)=\tilde{p}(x_+,x_+),$$

及

$$p(x_-,x_-)=\widetilde{p}(x_-,x_-).$$

于是

$$\|x+N_p\|=\|x+N_{\widetilde{p}}\|.$$

因此,映射

$$V:M/N_p\longrightarrow\widetilde{M}/N_{\widetilde{p}},$$

$$V(x+N_p)=x+N_{\widetilde{p}},x\in M,$$

可以扩张成一个 M_p 到 $M_{\widetilde{p}}$ 中的等距嵌入.

最后,令 $i:M\longrightarrow\prod$是包含映射,则对 $x\in M$,有

$$\|i(x)\|=\|x\|\leqslant\|x\|_{+1}.$$

于是若 $x\in\widetilde{M}$,且点列 $x_n\in M$ 满足$\|x_n-x\|_{+1}\longrightarrow 0$,则

$$\|i(x)-x\|=\|x_n-x\|\longrightarrow 0.$$

令 $\widetilde{i}(x)$ 由 $\widetilde{i}(x)=\lim i(x_n)$ 来定义,结合等式

$$\begin{aligned}\|x\|_{+1}^2&=[x,x]_{+1}\\&=(x_+,x_+)-(x_-,x_-)+p(x_+,x_+)-p(x_-,x_-),\end{aligned}$$

便知 $\widetilde{i}$ 是单映射等价于 p 是可闭的.

推论 3 设 A 是$\prod$空间上处处有定义的线性算子,且满足:

$$(x,Ay)=(Ax,y),$$

对所有 $x,y\in\prod$,则 A 是有界的.

证明 由闭图像定理,只需证明 A 的图像$G(A)$是闭的即可.设$(x_n,Ax_n)\longrightarrow(x,y)$,只需证$(x,y)\in G(A)$,即 $y=Ax$,对每个 $z\in\prod$,

$$\begin{aligned}(z,y)&=\lim(z,Ax_n)\\&=\lim(Az,x_n)=(Az,x)=(z,Ax).\end{aligned}$$

于是 $y=Ax$,即 $G(A)$ 是闭的.

推论 4 设 p 是 Pontrjagin 空间$\prod$的稠密子空间上的闭的对称(即满足$\overline{p(y,x)}=p(x,y)$)条件正定型,则存在$\prod$上唯一自伴算子 A,使得 $p(\phi,\psi)=(\phi,A\psi)$.这里 A 是条件正定算

子，即对 $x = x_- + x_+ \in \prod$有

$$(Ax_\pm, x_\pm) \geqslant 0, (Ax_-, x_-) \leqslant 0.$$

证明　由于 p 是闭的，因此 p 的定义域 $D(p)$ 可看作是一个按不定内积

$$(\phi, \psi)_{+1} = p(\phi, \psi) + (\phi, \psi)$$

完备化所成的$\prod_k$ 空间$\prod_{+1}$. 用$\prod_{-1}$ 表示$\prod_{+1}$ 上有界共轭线性泛函的空间. 令 j 是由 $\psi \longrightarrow (\cdot, \psi)$ 给出的从$\prod$到$\prod_{-1}$ 中的线性嵌入映射，并且 $j(\psi)$ 是有界的，因为有

$$\begin{aligned} |j(\psi) \cdot \phi| &= |(\psi, \phi)| = |(\phi_+, \psi_+) + (\phi_-, \psi_-)| \\ &\leqslant \|\phi\|_+ \|\psi\|_+ + \|\phi\|_- \|\psi\|_- \leqslant 2\|\psi\| \cdot \|\phi\|_{+1}. \end{aligned}$$

再令 i 是把$\prod_{+1}$ 嵌入到$\prod$中的单位映射. 现在给定 $\Phi \in \prod_{+1}$，令 $\widetilde{B}\Phi$ 由下式确定

$$(\widetilde{B}\Phi)(\phi) = p(\phi, \Phi) + (\phi, \Phi).$$

显然，$\widetilde{B}\Phi \in \prod_{-1}$. 由$\prod$空间上有界线性泛函的 Riesz 引理知 $\widetilde{B}$ 是$\prod_+$ 到$\prod_+$ 上的等距同构.

取

$$D(B) = \{\psi \in \textstyle\prod_{+1} \mid \widetilde{B}\psi \in Ranj\}.$$

在 $D(B)$上定义 B 为 $B = j^{-1}\widetilde{B}$. 先来说明 j 的值域在$\prod_{-1}$ 中稠密. 如若不然，则存在一个 $\lambda \in \prod_{-1}^*$，使 $\lambda \neq 0$，但 $\lambda(j(\psi)) = 0$，对每个 $\psi \in \prod$. 由 *Riesz* 引理，在$\prod_{+1}$ 中存在 $\phi_\lambda \neq 0$ 使得

$$\lambda(j(\psi)) = (j(\psi))(\phi_\lambda) = (\phi_\lambda \psi).$$

对所有 $\psi \in \prod$成立，这是不可能的. 因此 Ranj 在$\prod_{-1}$ 中稠密. 因 $\widetilde{B}$ 是等距同构，知 $D(B)$ 在$\prod_{+1}$ 中按$\|\cdot\|_{+1}$ 稠密. 再由$\|\cdot\| \leqslant \|\cdot\|_{+1}$ 及$\prod_{+1}$ 在$\prod$中稠密知 $D(B)$ 在$\prod$中按范数稠密.

设 $\phi, \psi \in D(B)$，则

$$\begin{aligned} (\phi, B\psi) &= p(\phi, \psi) + (\phi, \psi) \\ &= \overline{p(\psi, \phi) + (\psi, \phi)} \\ &= \overline{(\psi, B\phi)} \\ &= (B\psi, \phi). \end{aligned}$$

于是 B 是稠密的对称算子.

下面来证明 B 是自伴算子. 令 $F=\widetilde{B}^{-1}j$，由于 F 是$\prod$到$\prod$中处处有定义的对称算子，由推论 3 知 F 是有界自伴的. F 显然是单射. 于是 $F^{-1}:RanF\longrightarrow\prod$是自伴算子. 而 $F^{-1}=B$，所以 B 为自伴算子.

最后定义 $A=B-I$，则 A 也是定义在 $D(B)=D(A)$ 上的自伴算子，并且对 $\phi,\psi\in D(A)$ 有

$$(\phi,\psi)=(\phi,(B-I)\psi)=(\phi,B\psi)-(\phi,\psi)=p(\phi,\psi).$$

由 p 是条件正定的，知 A 是条件正的. A 的唯一性是显然.

推论 5　设 A 是一个条件正算子. 且令

$$q(\phi,\psi)=(\phi,A\psi),\phi,\psi\in D(A).$$

则 q 是可闭的条件正定型. 且 q 的扩张(或闭包)$\widetilde{q}$ 是唯一条件正自伴算子 $\widetilde{A}$ 的条件正定型，即有 $\widetilde{q}(\phi,\psi)=(\phi,\widetilde{A}\psi)$.

证明　令

$$(\phi,\psi)_{+1}=q(\phi,\psi)+(\phi,\psi).$$

则$(\cdot,\cdot)_{+1}$ 是 $D(A)$ 上的不定内积. 于是可以将 $D(A)$ 在 $\|\cdot\|_{+1}$ 下完备化而成为一个 Pontrjagin 空间$\prod_{+1}$. 如同推论 2，q 可以扩张为$\prod_{+1}$ 上的闭条件正定型 $\widetilde{q}$. 要说明 $\widetilde{q}$ 是$\prod$上闭的条件正定型，只需证明$\prod_{+1}$ 是$\prod$的子集. 为此令 $i:D(A)\longrightarrow\prod$是包含映射. 由于 $\|\phi\|=\|\phi\|_{+1}$，因此 i 是有界的. 再由通常的 B. L. T 扩张定理知，i 可以扩张为一个有界映射 $\widetilde{i}:\prod_{+1}\longrightarrow\prod$，且 $\|i\|\leqslant 1$. 要证$\prod_{+1}\subset\prod$. 只需证 $\widetilde{i}$ 是单射. 假设 $\widetilde{i}(\phi)=0$，则存在 $\phi_n\in D(A)$，使 $\|\phi-\phi_n\|_{+1}\longrightarrow 0$，且 $\|\widetilde{i}(\phi_n)\|=\|\phi_n\|\longrightarrow 0$. 于是再由 q 是可闭的知

$$\|\phi\|_{+1}^{2}=\lim[q(\phi_{n+},\phi_{n+})-q(\phi_{n-},\phi_{n-})+(\phi_{n+},\phi_{n+})-(\phi_{n-},\phi_{n-})]$$

$$\lim(|q|(\phi_n,\phi_n)+\|\phi_n\|)=0.$$

于是 $\widetilde{i}$ 是单的. 由 q 的定义还知 $\widetilde{i}$ 是满的. 从而 $\widetilde{i}$ 是一对一的.

因 $\widetilde{q}$ 是闭的对称的，由推论 4 知存在唯一的自伴算子 $\widetilde{A}$，使 $D(\widetilde{A})=D(\widetilde{q})$，且满足 $\widetilde{q}(\phi,\psi)=(\phi,\widetilde{A}\psi)$，这里 $\phi\in D(\widetilde{q}),\psi\in D(\widetilde{A})$. 现设 $\phi\in D(A)$. 则由 $\widetilde{q}$ 是 q 的扩张有

$$(A\phi,\psi)=\widetilde{q}(\phi,\psi)=(\phi,\widetilde{A}\psi).$$

对所有 $\psi \in D(\widetilde{A})$ 成立. 于是有

$$\phi \in D(\widetilde{A}^*) = D(\widetilde{A}),$$

且

$$\widetilde{A}^* \phi = \widetilde{A}\phi = A\phi.$$

即 $\widetilde{A}$ 是 A 的扩张. 同理,当 A' 是 A 的任意对称扩张,且 $D(A') \subset D(\widetilde{q})$ 时,$\widetilde{A}$ 都是 A' 的扩张. 于是当 A' 是自伴时就有 $\widetilde{A} = A'$.

定理 9.1　设$\prod$,K 是 Pontrjagin 空间. M 是$\prod$的稠密子空间,p 是 M 上的条件正定型. $P: M \longrightarrow \prod$, $T: M \longrightarrow K$ 是线性映射,则下列命题成立:

(1) 若

$$p(x,y) = (Tx, Ty), x, y \in M,$$

则 p 是可闭的(闭)的,当且仅当 T 是可闭(闭)的线性映射.

(2) 若

$$p(x,y) = (Tx, Ty), x, y \in M$$

p 是可闭的条件正定型,且 $\widetilde{p}$ 是$\widetilde{M} \subset \prod$上由 p 扩张而来的闭条件正定型,则 T 可以扩张为闭线性映照 $\widetilde{T}: \widetilde{M} \longrightarrow K$,且满足

$$\widetilde{p}(x,y) = (\widetilde{T}x, \widetilde{T}y), x, y \in M.$$

(3) 若

$$p(x,y) = (Px, y), x, y \in M,$$

且 p 对称,则 p 可扩张为 $\widetilde{M} \subset \prod$上闭的条件正定型 $\widetilde{p}$,P 可扩张成为条件正自伴算子 $\widetilde{P}$: $D(\widetilde{P}) \longrightarrow \prod$,且满足

$$M \subset D(\widetilde{P}) \subset \widetilde{M}, \widetilde{p}(x,y) = (\widetilde{P}x, y), x \in D(\widetilde{P}), y \in \widetilde{M}.$$

M_p 可以等距地嵌入到$\widetilde{M_{\widetilde{p}}}$ 中. 此外还有

$$\pm \widetilde{p}(x_\pm, x_\pm) \leqslant \mu_\pm (x_\pm) \| x_\pm \|^2,$$

$$x = x_+ + x_- \in C^\infty(\widetilde{P}) = \bigcap D(\widetilde{P^n})$$

$$\mu_\pm (x_\pm) = \liminf \| \widetilde{P}^{2^n} x_\pm \|^{2^{-n}}$$

进而

$$|\widetilde{p}|(x,y) \leqslant \max\{\mu_{\pm}(x_{\pm})\}\|x\|^{2}.$$

(4) 若

$$p(x,y)=(Tx,Ty)=(Px,y),x,y\in M,$$

则(3) 中的 $\widetilde{T}$ 是有界的,且 $\widetilde{M}=\prod$ 当且仅当存在一个 $C^{\infty}(\widetilde{P})$ 的稠子集 G 满足

$$\operatorname{Sup}\{\mu_{\pm}(x_{\pm}) \mid x=x_{+}+x_{-}\in G\}$$

是有限的.

证明 (1) 由 $p(x,y)=(Tx,Ty)$ 知

$$(Tx_{+},Tx_{+})\geqslant 0;(Tx_{-},Tx_{-})\leqslant 0.$$

因此存在一个等价范数$\|\cdot\|_{p}$使得

$$|p|(x,x)=\|Tx\|_{p}^{2},x\in M.$$

再由推论 1 便知 p 可闭(闭) 当且仅当 T 可闭(闭).

(2) 若 $x\in\widetilde{M}$,则存在点列 $x_{n}\in M$ 按范数$\|\cdot\|_{+1}$收敛于 x. 由于存在等价范数$\|\cdot\|_{p}$使得

$$\|Tx\|_{p}^{2}=|p|(x,x)\leqslant\|x\|_{+1}^{2},x\in M.$$

因此点列 Tx_{n} 按范数$\|\cdot\|$收敛. 于是可令 $\widetilde{T}x=\lim Tx_{n}$. 再由 $\widetilde{p}$ 的定义有

$$\widetilde{p}(x,x)=\lim p(x_{n},x_{n})=\lim(Tx_{n},Tx_{n})=(\widetilde{T}x,\widetilde{T}x).$$

所以 $\widetilde{p}(x,y)=(\widetilde{T}x,\widetilde{T}y)$,对任意 $x,y\in\widetilde{M}$. 因 $\widetilde{p}$ 是闭的,由(1) 知 $\widetilde{T}$ 也是闭的. 最后 $\widetilde{M}\subset\prod$ 是按推论 2 中 $\widetilde{M}$ 可单嵌入$\prod$中的意义来理解.

(3) 结论的前一部分由推论 5 及推论 2 即得. 现在设

$$x=x_{+}+x_{-}\in C^{\infty}(\widetilde{P})\subset D(\widetilde{P}),$$

则有

$$\widetilde{p}(x_{+},x_{+})=(\widetilde{p}x_{+},x_{+})\leqslant\|\widetilde{p}x_{+}\|\cdot\|x_{+}\|,$$

$$\widetilde{p}(x_{-},x_{-})=(\widetilde{p}x_{-},x_{-})\leqslant\|\widetilde{p}x_{-}\|\cdot\|x_{-}\|$$

又对每个 $n=0,1,2,\cdots$ 有

$$(\tilde{p}^{2n}x_+,\tilde{p}^{2n}x_+)=(\tilde{p}^{2n+1}x_+,x_+)=((\tilde{p}^{2n+1}x_+)_++(\tilde{p}^{2n+1}x_+)_-,x_+)$$
$$=((\tilde{p}^{2n}x_+)_+,(\tilde{p}^{2n}x_+)_+).$$

于是有

$$\|\tilde{p}^{2n}x_-\|^2=(\tilde{p}^{2n+1}x_+,x_+)\leqslant\|\tilde{p}^{2n+1}x_+\|\cdot\|x_+\|.$$

同理有

$$\|\tilde{p}^{2n}x_-\|^2=\|\tilde{p}^{2n+1}x_+\|\cdot\|x_-\|.$$

因此有

$$\pm\tilde{p}(x_\pm,x_\pm)\leqslant\|\tilde{p}^{2n}x_\pm\|^{2^{-n}}\cdot\|x_\pm\|^{1+2^{-1}+\cdots+2^{-n}}.$$

再对上式两端取下极限便得到需要的不等式. 最后,

$$|\tilde{p}(x,x)|=\tilde{p}(x_+,x_+)-\tilde{p}(x_-,x_-)\leqslant\mu_+(x_+)\|x_+\|^2+\mu_-(x_-)\|x_-\|^2$$
$$\leqslant\max\{\mu_\pm(x_\pm)\}(\|x_+\|^2+\|x_-\|^2)=\max\{\mu_\pm(x_\pm)\}\cdot\|x\|^2.$$

(4) 首先说明:若$Q:M\longrightarrow\prod$是自伴算子,则$C^\infty(Q)=\bigcap(D(Q^n))$在$\prod$中稠密. 我们已经知道当$Q$是$M$到 Hilbert 空间的自伴算子时,结论是正确的. 设 Pontrjagin 空间$\prod$的度规算子为J,$\prod$按正定内积形成的 Hilbert 空间为H. 则$J^{-1}QJ$是H上的自伴算子. 由于度规算子J是等距同构,因此$C^\infty(Q)$在中稠密. 下面证明(4).

充分性:设G是$C^\infty(P)$的稠密子集,且令$C_\pm=\sup\{\mu_\pm(x),x\in G\}$,则由(2)及(3)有

$$\|\tilde{T}x\|^2=(\tilde{T}x_+,\tilde{T}x_+)-(\tilde{T}x_-,\tilde{T}x_-)=\tilde{p}(x_+,x_+)-\tilde{p}(x_-,x_-)$$
$$\leqslant\max\{\mu_\pm(x)\}\cdot\|x\|^2\leqslant\max\{C_\pm\}\cdot\|x\|^2,x\in G$$

由$C^\infty(\tilde{p}$是$\prod$的稠密子集,知G在$\prod$中稠密. 于是对$x\in\prod$任意,存在点$x_n\in G$列,使得$x_n\longrightarrow x$. 由于$\tilde{P}$的定义域$D(\tilde{P})$包含在扩张了的条件正定型$\tilde{p}$的定义域$\tilde{M}$中,因此有

$$x_n\in G\subset C^\infty(\tilde{p})\subset\tilde{M}.$$

由

$$\|\tilde{T}x\|^2\leqslant\max\{C_\pm\}\cdot\|x\|^2,x\in G$$

知点列$\tilde{T}x_n$收敛. 又因$\tilde{T}$是闭的,$x\in D(\tilde{T})=\tilde{M}$,所以有$\tilde{T}x_n\longrightarrow\tilde{T}x$. 这就证明了$\tilde{M}=\prod$.

并且对 $x \in \widetilde{M}$ 有 $\|\widetilde{T}x\|^2 \leqslant \max\{C_\pm\} \cdot \|x\|^2$. 从而 $\widetilde{T}$ 有界.

必要性:若 $\widetilde{M} = \prod$ 且 $\widetilde{T}:\widetilde{M} \longrightarrow K$ 是有界的,则对每个 $x \in D(\widetilde{P}), y \in \widetilde{M}$ 有

$$(\widetilde{T}^* \widetilde{T}x, y) = (\widetilde{T}x, \widetilde{T}y) = (\widetilde{P}x, y).$$

因此对 $x \in D(\widetilde{P})$ 有 $\widetilde{T}^* \widetilde{T}x = \widetilde{P}x$. 又因为 $D(\widetilde{P})$ 在$\prod$中稠密,所以若 $x \in \prod$,则有点列 $x_n \in D(\widetilde{P})$ 使 $x_n \longrightarrow x$. 于是由 $\widetilde{P}x_n = \widetilde{T}^* \widetilde{T}x_n$ 知 $\widetilde{P}x_n \longrightarrow \widetilde{T}^* \widetilde{T}x$. 再由 $\widetilde{P}$ 是闭的知 $x \in D(\widetilde{P})$,且 $\widetilde{P}x_n \longrightarrow \widetilde{P}x$. 进而有 $D(\widetilde{P}) = \prod$,并且 $\widetilde{P} = \widetilde{T}^* \widetilde{T}$. 于是对每个 $x \in \prod$,及 $n = 0,1,2,\cdots$ 有

$$\|\widetilde{P}^{2n}x\|^{2^{-n}} \leqslant \|\widetilde{P}\| \cdot \|x\|^{2^{-n}}.$$

因此对每个 $x_\pm \in \prod_\pm$,有 $\mu_\pm(x_\pm) \leqslant \|\widetilde{P}\|$. 于是 $\sup(\mu_\pm(x_\pm))$ 有限.

推论 6 如果 M 是 Pontrjagin 空间$\prod$的稠密子空间. 并且 $P:M \longrightarrow \prod$是一个条件正算子,则

$$p(x_\pm, x_\pm) \leqslant \liminf \|P^{2n}x_\pm\|^{2^{-n}} \cdot \|x_\pm\|^2,$$

对每个 $x = x_+ + x_- \in C^\infty(P)$.

证明 从(3) 的证明过程即得.

推论 7 令 M 是$\prod$的稠密子空间. K 是一个$\prod_k$ 型空间. $T:M \longrightarrow K$ 是一个闭线性映射. 则 $M = \prod$,且 T 是有界的,当且仅当存在 M 的稠密子集 G 及 $C \geqslant 0$,使 $\|Tx\| \leqslant C\|x\|, x \in G$.

证明 在(4) 中 p 取为不定内积$(\cdot,\cdot)$ 即得.

§9.3 半群上条件正定函数与扩张定理

本节讨论半群上条件正定函数的扩张问题. 首先给出条件正定函数的概念及 Kernel 结构,通过若干引理证明半群上条件正定函数的扩张定理.

由于在 Pontrjagin 空间$\prod$上关于有界线性泛函表示的 Riesz 定理成立. 因此$\prod$上的不定内积$(\cdot,\cdot)$可以作为一个映射$(\cdot,\cdot):\prod \times \prod \longrightarrow C$. 用 L 表示$\prod$到$\prod$中有界线性算子的线性空间 $L(\prod,\prod)$. 令 S 是一个集,用 $F = F(S,\prod)$ 表示从 S 到$\prod$,除了有限个点外为零的函数全体的线性空间.

对于 $f \in F$，相应于$\prod$的分解$\prod = \prod_+ \otimes \prod_-$，可唯一表示为：

$$f(t) = f_+(t) + f_-(t), t \in S.$$

定义 9.2　一个函数 $A:S \times S \longrightarrow L$ 称为是条件正定的，若对每个 $f \in F$ 有

$$\sum (f_+(t), A(s,t) f_+(s)) \geqslant 0,$$

并且

$$\sum (f_-(t), A(s,t) f_-(s)) \leqslant 0, t, s \in S.$$

条件正定函数记为 CPD 函数.

一个 CPD 函数 $A:S \times S \longrightarrow L$ 确定了下面的一个条件正定型：

$$q: F \times F \longrightarrow C,$$

$$q(g,f) = \sum (g(t), A(s,t)), f, g \in F$$

称之为 A 的条件正定型.

令 $s \in S, x \in \prod$，用 $f_{s,x}$ 表示仅在 s 点值为 x，而在其他点处值为零的函数，则显然有 $f_{s,x} \in F$. 现在设 $A:S \times S \longrightarrow L$ 是一个 CPD 函数，q 是 A 的条件正定型.

对 $s \in S$，作线性映射：

$$X(s): \prod \longrightarrow F/N_q,$$

$$X(x)x = f_{s,x} + N_q, x \in \prod,$$

其中 N_q 为 q 的迷向部分，则对 $s, t \in S, x, y \in \prod$有

$$(y, A(s,t)x) = q(f_{t,y}, f_{s,x}) = (X(t)y, X(s)x),$$

并且对每个 $f \in F$，有 $\sum X(s) f(s) = f + N_q$.

上述结果是正定函数 Kernel 的结构在条件正定函数中的情况.

引理 9.1　令 p 是 Pontrjagin 空间$\prod$上的稠密子空间 M 上的条件正定型，则下列条件等价：

(1) 对每个 $x \in M$，存在一个函数 $m(x) \geqslant 0$ 使得

$$| p(x,y) | \leqslant m(x) \cdot \| y \|, y \in M.$$

(2) 存在唯一的条件正算子 $P: M \longrightarrow \prod$使得 $p(x,y) = (Px, y), x, y \in M$.

证明　由于对每个 $x \in M$, $p(x,y)$ 可以看作是 M 上的有界泛函，并且 Pontrjagin 空间上的 Riesz 定理成立，因此(1) 与(2) 成立.

引理 9.2　令 $A:S\times S \longrightarrow L$ 与 $B:S\times S \longrightarrow L$ 都是 CPD 函数，q 与 r 分别是 A 与 B 的条件正定型. $X:s \longrightarrow L(\pi, F/N_q)$ 是 Kernel 结构中的映射，则下列结论成立.

(1) $N_q \subset N_r$ 当且仅当存在一个 Pontrjagin 空间 K 及一个线性映射：

$$T:F/N_q \longrightarrow K$$

满足

$$(y, B(s,t)x) = (TX(t), y, TX(s)x), s,t \in S, x,y \in \prod.$$

(2) 对每个点列

$$f_n \in F, q(f_n, f_n) \longrightarrow 0,$$

$$r(f_n - f_m, f_n - f_m) \longrightarrow 0,$$

蕴含 $r(f_n, f_n) \longrightarrow 0$，当且仅当存在一个 Pontrjagin 空间 K 及一个闭映射：

$$\widetilde{T}:D(\widetilde{T}) \longrightarrow K,$$

满足：

$$F/N_q \subset D(\widetilde{T}) \subset F_q,$$

且有

$$(y, B(s,t)x) = (\widetilde{T}X(t)y, \widetilde{T}X(s)x), s,t \in S, x,y \in \prod.$$

(3) 存在一个函数 $m:F/N_q \longrightarrow R$ 满足：

$$|r(g,f)| \leqslant m(g+N_q) \cdot |q|(f,f)^{\frac{1}{2}}, f,g \in F,$$

当且仅当存在一个条件正自伴算子 $Q:D(Q) \longrightarrow F_q$，满足：

$$F/N_q \subset D(Q) \subset F_q,$$

且有

$$(y, B(s,t)x) = (QX(t)y, X(s)x), s,t \in S, x,y \in \prod.$$

证明　必要性：若 $N_q \subset N_r$，则令 $K = F_r$. 并作映射：

$$T: F/N_q \longrightarrow F/N_r,$$

$$T(f+N_q) = f+N_r, f \in F.$$

显然,T 是线性映射.若 $s,t \in S, x,y \in \prod$,则由 Kernel 结构有

$$\begin{aligned}
&(y, B(s,t)x) \\
&= r(f_{t,y}, f_{s,x}) \\
&= (f_{t,y}+N_r, f_{s,x}+N_r) \\
&= (TX(t)y, TX(s)x).
\end{aligned}$$

充分性:若满足条件的 K 及 T 是存在的,则对任意 $f,g \in F$ 有

$$\begin{aligned}
r(g,f) &= \sum (g(t), B(s,t)f(s)) \\
&= \sum (TX(t)g(t), TX(s)f(s)) \\
&= (\sum TX(t)g(t), \sum TX(s)f(s)) \\
&= (T\sum X(s)g(t), T\sum X(s)f(s)) \\
&= (T(g+N_q), T(f+N_q)).
\end{aligned}$$

若 $q(f,f)=0$,则 $f \in N_q$,即 $f+N_q=0$,于是

$$\begin{aligned}
0 &= \| T(f+N_q) \|^2 \\
&= (T(f+N_q)_+, T(f+N_q)_+) - (T(f+N_q)_-, T(f+N_q)_-) \\
&= | r | (f,f),
\end{aligned}$$

即 $f \in N_{|r|}$,而 $N_r = N_{|r|}$,所以 $f \in N_r$,即 $N_q \subset N_r$.

(2) 必要性:设点列 $f_n \in F$.若

$$q(f_n, f_n) \longrightarrow 0,$$

$$r(f_n - f_m, f_n - f_m) \longrightarrow 0,$$

蕴含着 $r(f_n, f_n) \longrightarrow 0$.则取 $f_n = f(n=0,1,2\cdots)$,便知从 $q(f,f)=0$,可推出 $r(f,f)=0$,即有 $N_q \subset N_r$.这样可以定义一个条件正定型:

$$p: F/N_q \times F/N_q \longrightarrow C,$$

$$P(g + N_q, f + N_q) = r(g, f), f, g \in F.$$

由假设及可闭定义知 p 是可闭的. 现令 $K = F_r$，映射 $T: F/N_q \longrightarrow K$ 如同(1) 中的定义，则对 $f, g \in F$

$$\begin{aligned} p(g + N_q, f + N_q) &= r(g, f) \\ &= (g + N_r, f + N_r) \\ &= (T(g + N_q), T(f + N_q)), \end{aligned}$$

于是存在一个闭线性映射 $\widetilde{T}: D(\widetilde{T}) \longrightarrow K$，满足 $F/N_q \subset D(\widetilde{T})$，且 $\widetilde{T}$ 是 T 的扩张. 于是由(1) 中的等式便知，对任意 $x, y \in \prod, s, t \in S$ 有

$$(y, B(s,t)x) = (\widetilde{T}X(t)y, \widetilde{T}X(s)x).$$

充分性：若满足条件的 $K, \widetilde{T}$ 是存在的，则如同(1) 中的情况有

$$|r|(f, f) = \|\widetilde{T}(F + N_q)\|^2, f \in F.$$

由 $\widetilde{T}$ 是闭的，即若

$$f_n + N_q \in D(\widetilde{T}),$$

$$f_n + N_q \longrightarrow f + N_q,$$

$$\|\widetilde{T}(f_n - f_m + N_q)\| \longrightarrow 0,$$

则有

$$\widetilde{T}(f_n + N_q) \longrightarrow \widetilde{T}(f + N_q),$$

且

$$f_n + N_q \in D(\widetilde{T}).$$

这样由

$$q(f_n, f_n) \longrightarrow 0,$$

有

$$f_n + N_q \longrightarrow 0 + N_q.$$

由

$$\|\widetilde{T}(f_n - f_m + N_q)\| \longrightarrow 0,$$

可得

$$r(f_n - f_m, f_n - f_m) \longrightarrow 0,$$

于是

$$\widetilde{T}(f_n + N_q) \longrightarrow \widetilde{T}(0 + N_q).$$

从而

$$|r|(f_n, f_n) \longrightarrow 0.$$

由此有 $r(f_n, f_n) \longrightarrow 0$.

(3) 充分性:若 Q 具有所述的性质,则对 $f,g \in F$,有

$$\begin{aligned} r(g,f) &= \sum (g(t), B(s,t)f(s)) \\ &= \sum (QX(t)g(t), X(s)f(s)) \\ &= (Q\sum X(t)g(t), \sum X(s), f(s)) \\ &= (Q(g+N_q), (f+N_q)). \end{aligned}$$

于是

$$|r(g,f)| \leqslant m(g+N_q)\|f+N_q\| = m(g+N_q)\cdot |q|(f,f)^{\frac{1}{2}}.$$

其中 $m(g+N_q) = \|Q(g+N_q)\|$.

必要性:显然有 $N_q \subset N_r$,定义 f/N_q 上的条件正定型 p 如下:

$$p(g+N_q, f+N_q) = r(g,f),$$

则

$$|p(g+N_q, f+N_q)| \leqslant m(g+N_q)\cdot \|f+N_q\|, f,g \in F.$$

由引理 9.1 存在一个条件正算子 $P: f/N_q \longrightarrow F_q$,使得

$$|p(g+N_q,f+N_q)|=(P(g+N_q),(f+N_q)),f,g\in F.$$

取 $g=f_{t,y},f=f_{s,x},s,t\in S,x,y\in\prod$,则有

$$p(f_{t,y},f_{s,x})=(y,B(s,t)x)=(PX(t)y,X(s)x).$$

于是条件正算子 P 可以扩张成 Q,且满足所要求的条件.

定义 9.3 假设是一个有单位元的单群. $A:S\times S\longrightarrow L$ 是一个函数. 一个三元组 (K,π,R) 称为是 A 的扩张,如果 K 是一个 Pontrjagin 空间. $R:\prod\longrightarrow K$ 是一个线性映射,并且对每个 $s\in S$,算子 $\pi(s):D(s)\longrightarrow K$ 满足下述条件:

(1)$\pi(1)=I$;

(2)$R\pi$ 包含在每个 $D(s)$ 中,$s\in S$;

(3)$\pi(s)Rx:s\in S,x\in E$ 的线性包 M 在 K 中稠密,并且 M 包含在 $D(s)$ 中,$s\in S$;

(4)$\pi(s)\pi(t)k=\pi(st)k,s,t\in S,k\in M$;

(5)$(y,A(s,t)x)=(\pi(t)Ry,\pi(s)Rx),s,t\in S,k\in\prod$.

A 的一个扩张叫做闭的(或有界的),若对任意 $s\in S,\pi(s)$ 是闭的(或有界的)算子. 如果扩张 (K,π,R) 是有界的,则因 $D(s)$ 在 K 中稠密,$\pi(s)$ 可以扩张成为 K 上的有界线性映射,对任意 $s\in S,\pi$ 是一个半群同态.

现在给定一个半群 S 和一个 CPD 函数 $A:S\times S\longrightarrow L$. 令 q 是 F 上 A 的条件正定型. 对每个 $u\in S$,确定一个 CPD 函数 $A_u:S\times S\longrightarrow L$ 如下:

$$A_u(s,t)=A(us,ut),s,t\in S,$$

设 q_n 是 F 上 A_u 的条件正定型. 对每个 $u\in S$,作线性映射 $a(u):F\longrightarrow F$ 如下:

$$(a(u)f)(t)=\sum_{s:us=t}f(s),t,u\in S,f\in F.$$

推论 8

(1) 上述定义的映射 $a:S\longrightarrow L(F)$ 是一个半群同态,且 $a(1)=I_F$.

(2) $q_n(g,f)=q(a(u)g,a(u)f),u\in S,f,g\in F$.

(3) 对每个 $u\in S$,存在一个 F_{q_u} 到 F_q 的等距映射击 $i(u)$.

证明(1) 若 $u,\nu,t\in S,f\in F$,则

$$(a(u),a(\nu)f)(t)=\sum_{t':ut'=t}(a(\nu)f)(t')$$

$$=\sum_{t':ut'=t}(\sum_{s:\nu s=t'}f(s))$$

$$= \sum_{s:uvs=t} f(s)$$

$$= (a(uv)f)(t).$$

另外由$(a(1)f)(t) = \sum_{s:1\cdot s=t} f(s) = f(t)$即知$a(1) = I_F$.

(2) 对$u \in S, f, g \in F$有

$$\begin{aligned} q_u(g,f) &= \sum_{t,s}(g(t), A(us,ut)f(s)) \\ &= \sum_{s',t'}(\sum_{t:ut=t'} g(t), \sum_{s:us=s'} A(us,ut)f(s))(us = s', us = t') \\ &= \sum_{s',t'}(a(u)g(t'), A(s',t')a(u)f(s)) \\ &= q(q(u)g, a(u)f). \end{aligned}$$

(3) 若$u \in S, f \in F$,则由(2)有

$$\begin{aligned} \|f + N_{q_u}\|^2 &= |q_u|(f,f), \\ &= |q_u|(a(u)f, a(u)f) = \|a(u)f + N_q\|^2, \end{aligned}$$

这个映射$f + N_{q_u} \longrightarrow a(u)f + N_q$可以扩张成$F_{q_u}$到$F_q$的等距映射$i(u)$.

定理 9.2　设S是一个半群. $A:S \times S \longrightarrow L$是一个 CPD 函数,$q$与$q_u(u \in S)$分别是$F$上$A$与$A_u$的条件正定型. X是由$X(s)x = f_{s,x} + N_q$定义的映射. 则下列命题成立:

(1)A存在扩张当且仅当$N_q \subset N_{q_u}$,对每个$u \in S$.

(2)① 若对每个点列$f_n \in F$,

$$q(f_n, f_n) \longrightarrow 0, q_u(f_n - f_m, f_n - f_m) \longrightarrow 0$$

蕴含着对每个$u \in S$有$q_u(f_n, f_n) \longrightarrow 0$,则$A$存在闭扩张.

② 若A存在一个闭扩张,则对每个点列$f_n \in F$,

$$|q|(f_n, f_n) \longrightarrow 0, |q_u|(f_n - f_m, f_n - f_m) \longrightarrow 0$$

蕴含着对每个$u \in S$有$|q_u|(f_n, f_n) \longrightarrow 0$.

(3)A存在有界扩张当且仅当

① 对每个$u \in S$,存在一个条件正定自伴算子$P(u):F/N_q \longrightarrow F_q$满足:

$$(y, A_u(s,t)x) = (P(u)X(t)y, X(s)x), s,t \in S, x,y \in \prod;$$

② 对每个 $u \in S$,存在一个 $C^\infty(\widetilde{P}(u))$ 的稠子集 G_u 满足:

$$\sup\{\mu_\pm(u,x_\pm);x = x_+ + x_- \in G_u\}$$

都有限.其中 $\widetilde{P}(u)$ 是 $P(u)$ 的扩张,且

$$\mu_\pm(u,x_\pm) = \liminf\|\widetilde{P}(u)^{2^n}x_\pm\|^{2^{-n}}.$$

证明(1) 必要性:设(K,π,R)是 A 的扩张,则

$$\begin{aligned} q(g,f) &= \sum(g(t),A(s,t)f(t)) \\ &= \sum(\pi(t)Rg(t),\pi(s)Rf(s)) \\ &= (\sum\pi(t)Rg(t),\sum\pi(s)Rf(s)) \end{aligned}$$

又有

$$\begin{aligned} q_u(g,f) &= q(a(u)g,a(u)f) \\ &= (\sum\pi(t)R(a(u)g)(t),\sum\pi(s)R(a(u)f)(s)) \\ &= (\sum\pi(ut')Rg(t'),\sum\pi(us')Rf(s')) \\ &= (\pi(u)\sum\pi(t)Rg(t),\pi(u)\sum\pi(s)Rf(s)). \end{aligned}$$

因 $\pi(u)$ 是线性的,所以 $N_q \subset N_{q_u}$.

充分性:由假设及推论 8(2) 对每个 $u \in S$,映射

$$\pi(u):F/N_q \longrightarrow F/N_q,$$

$$\pi(u)(f+N_q) = a(u)f+N_q, f \in F$$

是有定义的.取 $K = F_{q_u}$,$R = X(1)$.下面说明(K,π,R)是 A 的扩张.

①$\pi(1) = I_F$ 是显然.

② 由 $\pi(s)R = X(s), s \in S$ 有 $\pi(s)R\pi = X(s)\pi$.

③ 由 $R = X(1)$ 及 ② 便得.

④ 由 $\sum X(s)f(x) = f + N_q$ 知对任意 $u \in S, f \in F$ 有

$$\pi(u)\sum X(s)f(s)=\pi(u)(f+N_q)=(a(u)f)(t)+N_q$$
$$=\sum X(t)(a(u)f)(t)=\sum_t X(t)\sum_{s:us=t}f(s)$$
$$=\sum_{us}X(us)\sum_{s:us=t}f(s)$$
$$=\sum_s X(us)f(s),$$

于是对任意 $u,\nu,s\in S,f\in F$ 有

$$\pi(u)\pi(\nu)\sum X(s)f(s)=\pi(u)\sum X(\nu s)f(s)$$
$$=\sum X(u\nu)f(s)$$
$$=\pi(u\nu)\sum X(s)f(s).$$

④ 对任意 $t,s\in S,x,y\in\coprod$有

$$(y,A_n(s,t)x)=q_u(f_{t,y},f_{s,x})$$
$$=(X(t)y,X(s)x)$$
$$=(\pi(t)Ry,\pi(s)Rx).$$

(2)① 由引理 9.2 知，存在一个 Pontrjagin 空间 K 及一个闭映射 $\widetilde{T}:D(\widetilde{T})\longrightarrow K$ 满足：

$$F/N_q\subset D(\widetilde{T})\subset F_q,$$

且有

$$(y,B(s,t)x)=(\widetilde{T}X(t)y,\widetilde{T}X(s)x),s,t\in S,x,y\in\coprod.$$

由此令 $B=A_u,r=q_u,u\in S$，则存在线性映射

$$\widetilde{T}(u):D\widetilde{T}(u)\longrightarrow K,K=F/N_r,$$

使得

$$(y,A_u(s,t)x)=(\widetilde{T}(u)X(t)y,\widetilde{T}(u)X(s)x).$$

由于 $X(t)=i(t)X(1)$，再取

$$\pi(ut)=\widetilde{T}(u)i(t)\text{ 及 }R=X(1),$$

则有

$$(y, A(us, ut)x) = \pi(ut)Ry, \pi(us)Rx.$$

即得 A 的一个扩张(K,π,R). 其实这还是一个闭扩张，这只需注意 $\pi(us) = \tilde{\pi}(u)i(s)$，而 $\widetilde{T}(u)$ 是闭的，

$$i(s): f + N_q \longrightarrow a(s)f + N_q$$

是线性等距的便知.

② 若 A 有一个闭扩张(K,π,R)，则对 $f,g \in F$ 有

$$g(g,f) = (\sum \pi(t)Rg(t), \sum \pi(s)Rf(s))$$

$$= \sum (g(t), A(s,t)f(t)).$$

由

$$|q|(f_n, f_n) = \left\| \sum \pi(t)Rf_n(t) \right\|^2 \longrightarrow 0$$

与

$$|q|(f_n - f_m, f_n - f_m) = \left\| \pi(u) \sum \pi(t)Rg(t) \right\|^2 \longrightarrow 0,$$

及 $\pi(u)$ 是闭算子知 $\pi(u)\sum \pi(t)Rg(t) \longrightarrow 0$，即有 $|q|(f_n, f_n) \longrightarrow 0$.

(3) 必要性：设(K,π,R)是 A 的有界扩张，则由(1)知，对每个 $u \in S$ 有 $N_q \subset N_{q_u}$. 于是如同(1)中有 F_q 到 K 上的一一映射 U 及 $\pi(u): f + N_q \longrightarrow a(u)f + N_q$. 令

$$P(u) = U^* \pi^*(u)\pi(u)U, u \in S,$$

则对 $u,s,t \in S, x,y \in \prod$有

$$\begin{aligned}(P(u)X(t)y, X(s)x) &= (U^* \pi^*(u)\pi(u)UX(t)y, X(s)x)\\ &= (\pi(u)UX(t)y, \pi(u)UX(s)x)\\ &= (\pi(u)Ui(t)X(1)y, \pi(u)Ui(s)X(1)x)\\ &= (\pi(u)\pi(t)Ry, \pi(u)\pi(s)Rx)\\ &= (y, A(ut, us)x).\end{aligned}$$

于是 ①② 便得.

充分性:若条件 ① 成立,则由引理9.2(3) 知 $N_{q_u} \subset N_q$. 于是可定义 F/N_q 上条件正定型

$$p_u : p_u(g + N_q, f + N_q) = q_u(g, f),$$

且满足

$$\begin{aligned}
p_u(g + N_q, f + N_q) &= \sum (g(t), A(us, ut) f(s)) \\
&= \sum (g(t), A_u(s,t) f(s)) \\
&= \sum (P(u) X(t) g(t), X(s) f(s)) \\
&= (P(u)(g + N_q), (f + N_q)), f, g \in F.
\end{aligned}$$

于是 P_u 可闭,即对 $f_n \in F$,若

$$\| f_n + N_q \|^2 = | q | (f_n, f_n) \longrightarrow 0,$$

及

$$q_u(f_n - f_m, f_n - f_m) = p_u(f_n - f_m + N_q, f_n - f_m + N_q) \longrightarrow 0,$$

则有

$$q_u(f_n, f_n) = p_u(f_n + N_q, f_n + N_q) \longrightarrow 0, u \in S.$$

于是由 ② 知 A 有一个闭扩张(K, π, R). 再由 ① 有

$$\begin{aligned}
(p(u)(g + N_q), (f + N_q)) &= (a(u) g + N_q, a(u) f + N_q) \\
&= q(a(u) g, a(u) f) \\
&= q_u(g, f) \\
&= (\tilde{\pi}(u)(g + N_q), \tilde{\pi}(u)(f + N_q)), f, g \in F
\end{aligned}$$

因此若 ② 成立,则 $\tilde{\pi}(u)$ 是有界的,$u \in S$. 即$(K, \tilde{\pi}, R)$ 是 A 的有界扩张.

§9.4 应用

作为上一节定理的应用给出两个定理. 其中一个是具有明确物理背景的结果,即

Pontrjagin 空间上量子力学的基本定理.

定理 9.3 令 S 是一个半群,$A:S\times S\longrightarrow L$ 是 CPD 函数. 若存在一个函数 $d:S\longrightarrow S$ 满足:

$$(y,A(us,ut)x)=(y,A(s,d(u)t)x),u,s,t\in S,x,y\in\prod,$$

则 (1)A 有一个闭的扩张;

(2)A 有有界扩张当且仅当存在一个 $\pi\times\pi$ 上实函数 b 及 S 上的函数 C 满足

$$c(s,t)\leqslant c(s)\cdot c(t),s,t\in S,$$

且

$$|(y,A(s,t)x)|\leqslant b(x,y)\cdot c(s)\cdot c(t),s,t\in S,x,y\in\prod.$$

证明 (1) 对 $u\in S,f,g\in F$. 令 $d(u)t=t'$,结合定理条件有

$$\begin{aligned}q_u(g,f)&=\sum(g(t),A(us,ut)f(s))\\&=\sum(g(t),A(s,d(u)t)f(s))\\&=(a(d(u))g(t'),A(s,t')f(s))\\&=q(a(d(u))g,f).\end{aligned}$$

由推论 8 及正定型的 Schwarz 不等式有

$$\begin{aligned}|q(a(u)g,a(u)f)|&=|q_u(g,f)|\\&=|q(a(d(u))g,f)|\\&\leqslant|q|(a(d(u))g,f)\\&\leqslant|q|(a(d(u))g,a(d(u))g)^{\frac{1}{2}}|q|(f,f)^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

对每个 $u\in S,f,g\in F$ 成立. 再将该不等式中 u 换成 $d(u)$ 得

$$\begin{aligned}&|q(a(d(u))g,a(d(u))f)|\\&\leqslant|q|(a(d(d(u)))g,a(d(d(u)))g)^{\frac{1}{2}}|q|(f,f)^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

由此及 $N_q=N_{|q|}$ 便可作映射

$$P(u):F/N_q\longrightarrow F/N_q,$$

$$P(u)(f+N_q)=a(d(u))f+N_q,f\in F.$$

显然 $P(u)$ 是线性的，并且有

$$q_u(g,f)=q(a(d(u))g,f)$$

$$=(P(u)(g+N_q),f+N_q),f,g\in F.$$

再由定理 9.2(1) 的证明过程知 A 有闭扩张.

(2) 必要性：若 (K,π,R) 是 A 的一个有界扩张，则对 $x,y\in\prod,s,t\in S$ 有

$$|(y,A(s,t)x)|$$

$$=|(\pi(t)Ry,\pi(s)Rx)|$$

$$\leqslant\|\pi(t)\|\cdot\|\pi(s)\|\cdot\|Ry\|\cdot\|Rx\|.$$

取 $b(x,y)=\|Rx\|\cdot\|Ry\|,x,y\in\prod$，及 $C(s)=\|\pi(s)\|,s\in S$ 即可.

充分性：设函数 b,c 是存在的. 令 $\widetilde{P}(u)$ 是 $P(u)$ 的扩张，$u\in S$. 因 $P(u)$ 映 F/N_q 到自身，所以 F/N_q 包含在 $C^{\infty}(\widetilde{P}(u))$ 中. 由 F/N_q 稠于 N_q 知 F/N_q 稠于 $C^{\infty}(\widetilde{P}(u))$. 由推论 8，$A$ 是半群同态，有

$$\widetilde{P}(u)^n(f+N_q)=(a(d(u)))^nf+N_q$$

$$=a(d(u)^n)f+N_q,f\in F,n=1,2,\cdots,$$

所以对 $f\in F,n=1,2,\cdots$ 有

$$\|\widetilde{P}(u)^{2^n}(f+N_q)\|^2=(\widetilde{P}(u)^{2^{n+1}}(f_++N_q)_++\widetilde{P}(u)^{2^{n+1}}(f_++N_q)_-,f_++N_q)$$

$$=(\widetilde{P}(u)^{2^{n+1}}(f_++N_q),f_++N_q)$$

$$=(a(d(u))^{2^{n+1}}f_++N_q,f_++N_q)$$

$$=q(a(d(u))^{2^{n+1}}f_+,f_+)$$

$$=\sum(f_+(t),A(s,t)(a(d(u)^{2^{n+1}})f_+)(s))$$

$$=\sum(f_+(t),A(d(u)^{2^{n+1}}s,t)f_+(s))$$

$$\leqslant\sum b(f_+(s),f_+(t))c(d(u))^{2^{n+1}}c(s)\cdot c(t).$$

于是

$$\liminf \|\widetilde{P}(u)^{2^n}(f_+ + N_q)\|^{2^{-n}} \leqslant c(d(u)).$$

同理有

$$\liminf \|\widetilde{P}(u)^{2^n}(f_- + N_q)\|^{2^{-n}} \leqslant c(d(u)).$$

于是 A 有有界扩张.

下面给出 Pontrjagin 空间上量子力学的一个基本定理.

定理 9.4 令 S 是一个半群，K 是一个 Pontrjagin 空间. $\tau: S \longrightarrow B(K)$ 是半群同态，且令 M 是 K 的在 $\pi(u)$ 与 $\tau(u)^* \tau(u)$ 下不变的子空间，$u \in S$，q 是 M 上条件正定型，且满足：

$$q(\tau(u),\tau(u)y) = q(x,\tau(u)^*\tau(u)y), x, y \in M, u \in S,$$

及 $q(x,x) \leqslant c \cdot \|x\|^2$，对所有 $x \in M, c > 0$，则存在一个半群同态 $\pi: S \longrightarrow B(M_q)$，满足

(1) $\pi(u)(x + N_q) = \tau(u)x + N_q, u \in S, x \in M$;

(2) $\|\pi(u)\| \leqslant \|\tau(u)\|, u \in S$.

证明 (1) 对于固定的 $u \in S$，由 q 与 τ 的性质及正定型 $|q|$ 的 Schwarz 不等式有：

$$\begin{aligned}
&q(\tau(u)x,\tau(u)y)\\
&= q(x,\tau(u)^*\tau(u)y)\\
&\leqslant |q|(x,\tau^*(u)\tau(u)y)\\
&\leqslant |q|(x,x)^{\frac{1}{2}} \cdot |q|(\tau^*(u)\tau(u)y,\tau^*(u)\tau(u)y)^{\frac{1}{2}}, x, y \in M.
\end{aligned}$$

由于 $N_q = N_{|q|}$，因此

$$\tau(u)(x + N_q) = \tau(u)x + N_q, x \in M$$

有意义，并且定义了一个线性映射

$$T: M/N_q \longrightarrow M/N_q.$$

这样，若 $x, y \in M$，则有

$$\begin{aligned}
(T(x + N_q), T(y + N_q)) &= q(\tau(u)x,\tau(u)y)\\
&= q(x,\tau^*(u)\tau(u)y)
\end{aligned}$$

$$= (x + N_q, \tau^*(u)\tau(u)y + N_q).$$

因此 T 的定义域包含在 T^* 的定义域中,并且有

$$\tau^*(u)\tau(u)(x + N_q) = \tau^*(u)\tau(u)y + N_q, x \in M.$$

这样 $\tau^*(u)\tau(u)$ 是条件正定且在 M_q 中稠密的算子,并且有

$$(T(x + N_q), T(y + N_q)) = (x + N_q, \tau^*(u)\tau(u)(y + N_q)), x \in M.$$

令 $P = \tau^*(u)\tau(u)$,$\widetilde{P}$ 是 P 的扩张,则 M/N_q 在 $C^\infty(\widetilde{P})$ 中稠密. 若 $x = x_+ + x_- \in M$,则有

$$\begin{aligned}
\|\widetilde{P}^{2^n}(x_\pm + N_q)\|^{2^{-n}} &= (\widetilde{P}^{2^n}(x_\pm + N_q), \widetilde{P}^{2^n}(x_\pm + N_q))\, 2^{-n-1} \\
&= q\,((\tau^*(u)\tau(u))^{2^n} x_\pm, (\tau^*(u)\tau(u))^{2^n} x_\pm)^{2^{-n-1}} \\
&\leqslant c^{-2^{n-1}} \|\tau^*(u)\tau(u)^{2^n} x_\pm\|^{2^{-n}} \\
&\leqslant (c^{\frac{1}{2}}\|x_\pm\|)^{2^{-n}} \cdot \|\tau(u)\|^2.
\end{aligned}$$

于是有

$$\|T(x + N_q)\| \leqslant \|\tau(u)\| \cdot \|x + N_q\|, x \in M.$$

因此 T 也可以扩张为 M_q 上的有界线性算子 $\pi(u)$. 显然满足条件(1)与(2).

最后,由 τ 是半群同态,知对每个 $u \in S$,映射 $u \longrightarrow \pi(u)$ 也是半群同态.

第十章

Pontrjagin 空间上算子代数中进一步研究的问题

§10.1 文献索引与评注

第一章　Pontrjagin 空间上算子代数的基本概念与进展

本章简要介绍 Pontrjagin 空间$\prod_k$的概念、正规分解、零性子空间；介绍$\prod_k$空间上的算子及算子代数有关概念、对称算子代数、JVN- 代数、JC* - 代数的概念；介绍$\prod_1$空间上的算子代数分类的有关结果，以及交换算子代数、非退化算子代数等有关结果.

由于本章不属于本书重点内容，因此这里只给出结论，略去证明，读者可以在相应的参考文献中找到证明.

§1.1 Pontrjagin 空间及其算子基本概念

本节内容参考了文献[2][5].

§1.2 算子代数的基本概念

本节内容参考了文献[2][52 ～ 55][69][70].

§1.3 JVN- 代数与 JC* - 代数

本节内容参考了文献[17][52 ～ 54].

§1.4 一般算子代数

本节开始关于算子代数的简约是作者给出的.$\prod_1$空间上算子代数的分类及各类算子代数形式的内容出自文献[16]，属于 Shulman，但未发表证明.

§1.5 交换代数的结构

本节内容出自文献[11 ～ 14]，属于属于 Naimark.

§1.6 投影 VN 化与 C* 化结构

本节内容出自文献[53][54]，属于童裕孙.

§1.7 非退化代数的结构

本节内容出自文献[17]，属于属于 Liberzon 和 Shulman.

§1.8 稠密性定理与约化代数

本节内容出自文献[51][52][55]，属于童裕孙.

§1.9 二次交换性

本节内容出自文献[2].

第二章　算子代数的对称理想与非对称理想

本章首先给出一组Shulman意义下的六类算子代数，然后证明了非退化的JC^*-代数和非退化的JVN-代数的理想必是对称的.对一般的JC^*-代数给出两种对称的理想和两种非对称的理想.说明了$\prod_1$空间上JVN-代数除了第三类代数外无非对称理想.最后构造两个关于JC^*-代数理想对称性的例子.

本章全部内容属于作者.

§2.1 $\prod_k$空间上的一组算子代数

本节内容属于作者，出自文献[65][69][70].

§2.2 对称理想与非对称理想

本节内容属于作者，出自文献[70][71].

§2.3 算子的共轭运算

本节内容属于作者，出自文献[66][70].

§2.4 两个理想

1. $\mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_2$的结构

2. $\mathcal{M}_2$的结构

本节中两类理想的概念是作者给出的，结果属于作者，出自文献[66][70].

§2.5 JVN-代数与JC^*-代数的理想

本节内容属于作者，出自文献[61][66].

§2.6 算子代数理想对称性的条件

本节内容属于作者，出自文献[61][66][70].

第三章　算子代数的分类与形式

本章利用算子代数的对称理想和非对称理想给出$\prod_k$空间上一般对称算子代数的分类定义.将$\prod_k$空间上一般算子代数分为六类，通过研究分类概念中对称与非对称理想的性质与表示，给出各类算子代数的形式，并给出各类算子代数闭性的等价条件.最后给出若干情形的算子代数的例子.

本章全部内容属于作者，个别内容属于作者及合作者.

§3.1 算子代数分类的定义

本节内容属于作者，算子代数的分类概念是作者给出的，出自文献[69][70].

§3.2 共轭结构

本节内容属于作者,出自文献[69][70].

§3.3 一些引理

本节内容属于作者,出自文献[69][70][72].

§3.4 各类算子代数的形式

1. 0 类算子代数

2. Ⅰ 类算子代数

3. II_a 类算子代数

4. II_b 类算子代数

5. III_a 类算子代数

6. III_b 类算子代数

本节内容属于作者,出自文献[66][69][70].

§3.5 各类算子代数闭性的等价条件

本节内容属于作者及合作者,出自文献[66][69][70].

§3.6 一些子代数的情况

本节内容属于作者,出自文献[66][69][70].

第四章　算子代数的其他形式及弱闭、一致闭等价条件

本章给出$\prod_k$空间上第一类算子代数的另一种形式,并给出一组 Shulman 意义下一组算子代数是弱闭和一致闭的等价条件.

本章全部内容属于作者,个别内容属于作者及合作者.

§4.1 引言

本节内容主要参考了 Shulman 的文献[16].

§4.2 一类特殊映射的构造

本节内容属于作者,出自文献[69][70][74].

§4.3 拟向量性质

本节内容属于作者,出自文献[69][70][74][75].

§4.4 第一类算子代数的形式

本节内容属于作者,出自文献[69][70][74][75].

§4.5 $\prod_1$ 空间上一个算子代数

本节定理 4.2 属于作者与合作者,其余内容属于作者.本节内容是首次发表.

§4.6 弱闭、一致闭等价条件

本节内容属于作者,出自文献[65][69].

第五章　算子代数的 C^*-等价性

本章考虑一组 Shulman 意义下一般对称算子代数的 C^*-等价性问题,以及商代数的 C^*-等价性,对称性与非对称性的理想,算子代数的交换性.

本章全部内容属于作者.

§5.1 算子代数 C^*-等价的条件与 C^*-等价的理想

本节内容属于作者,出自文献[69][70].

§5.2 理想的对称性

本节内容属于作者,出自文献[71].

§5.3 商代数

本节内容属于作者,出自文献[69][71].

§5.4 交换性条件

本节内容属于作者,出自文献[69][70][71].

第六章　算子代数的导子与不变子空间

本章首先提出算子代数内导子是一个酉等价不变的概念,借此给出 $\prod_k$ 空间上非退化 JVN-代数的导子是内的等价条件.对 $\prod_1$ 空间上一般算子代数说明了第 0、II_a 和 III_a 类 JVN-代数的导子必是内的.通过例子说明第 Ⅰ、II_b 和 III_b 类 JVN-代数的导子一般不是内的.最后讨论了算子代数的不变子空间问题.

本章全部内容属于作者,个别内容属于作者及合作者.

§6.1 内导子的等价条件

本节内容属于作者,出自文献[62][69].

§6.2 导子的若干例子

本节内容属于作者,出自文献[62][69].

§6.3 各类代数导子的情况

本节内容属于作者,出自文献[62][69].

§6.4 算子代数的不变子空间

1. 引言

2. 不变子空间条件

3. $\mathcal{A}$与$\mathcal{A}^*$ 的公共不变子空间

本节内容属于作者及合作者,出自文献[69][70][76].

§6.5 不变子空间偶对

本节内容属于作者及合作者,出自文献[69][76].

第七章　算子代数的抽象定义

本章给出 JC^*-代数的抽象定义,提出 SC^*-代数概念,证明一个 Banach*-代数是 SC^*-代数及抽象的 JC^*-代数的等价条件,并给出 SC^*-代数是$\prod_k$型的条件.最后在$\prod_k$空间上的 SC^*-代数中构造一族 J_--有限正线性泛函的例子.

本章全部内容属于作者,个别内容属于作者及合作者.

§7.1 JC^*-代数的抽象定义

本节内容属于作者及合作者,出自文献[70][73].

§7.2 SC^*-代数是$\prod_k$型的条件

本节内容属于作者,出自文献[70][73].

§7.3 一个例子

本节内容属于作者,出自文献[70][73].

第八章　Pontrjagin 空间上的算子代数理论的应用

本章在$\prod_k$空间的正则分解和正规分解下给出算子的表示形式,讨论了$\prod_k$空间上算子的交换性问题,给出若干交换性定理,给出算子表示的运算及算子范数不等式.

本章全部内容属于作者,个别内容属于作者及合作者.

§8.1 在算子交换性方面的应用

1. 例子

2. 算子的表示

3. 交换性定理及其证明

本节内容属于作者,出自文献[64][69][70].

§8.2 Putnam-Fuglede 定理的另一种情况

1. 引言

2. 几个引理

3. 例子

4. 定理及其证明

本节内容属于作者及合作者,出自文献[64][69][70].

§8.3 不等式中的应用

本节内容属于作者及合作者,出自文献[70].

§8.4 算子三角分解及应用

本节内容属于作者,出自文献[70][71].

第九章　条件正定与扩张

本章首先讨论条件正定型与扩张问题,得到了 Pontrjagin 空间上对称算子的扩张定理. 其次讨论半群上条件正定函数的扩张问题,得到了一个扩张定理. 作为应用,讨论了半群上条件正定函数的闭扩张与有界扩张问题,并证明了 Pontrjagin 空间上量子力学的一个基本定理.

本章全部内容属于作者.

§9.1 引言

本节内容主要参考了文献[48][49][50][60].

§9.2 条件正定型与扩张定理

本节内容属于作者,出自文献[63].

§9.3 半群上条件正定函数与扩张定理

本节内容属于作者,出自文献[63][67].

§9.4 应用

本节内容属于作者,出自文献[63][67].

10.2 进一步研究的问题

问题 1. 算子代数分类问题

本书是利用算子代数的一类对称理想和非对称理想之间的某些包含关系给出算子代数的分类,并借助于这些理想的性质和形式给出各类一般算子代数的形式.

本书给出的分类概念和算子代数的形式比较复杂,是否还可以进一步研究寻找其他的分类方法,按新的分类方法给出各类算子代数的形式.

问题 2. 算子代数的导子问题.

算子代数的内导子是研究算子代数的重要工具,内导子可以在算子代数中引入 Lie 结

构,从而有可能用 Lie 的工具来研究算子代数的性质和结构问题. 通常 Von Neumann 代数上的导子必是内的. 本书给出 Pontrjagin 空间上非退化 JVN- 代数导子是内的充要条件. 就指标为 1 的 Pontrjagin 空间上一般 JVN- 代数,证明了第 0、Ⅱa 和 Ⅲa 类代数上的导子是内的,并通过例子说明第 Ⅰ、$Ⅱ_b$ 和 $Ⅲ_b$ 类代数上的导子一般不是内的.

对一般算子代数内导子的条件问题还有待进一步研究.

问题 3. 算子的交换性问题.

在经典的弱闭算子代数,即 Hilbert 空间上的 Von Neumann 代数中,二次交换定理成立. 这一重要结论在Pontrjagin空间上的JVN- 代数中是否总是成立,并不明显. 文[17]证明了在 Pontrjagin 空间上非退化的 JVN- 代数中类似的二次交换定理成立,文[2] 证明了 Pontrjagin 空间上有限个可交换的自共轭算子组,当相应于它们的广义临界点的根子空间都是非退化时,它们生成的弱闭算子代数中二次交换定理成立,证明了在可分的指标为 1 空间上交换对称算子代数中二次交换定理也成立. 本书中证明在 Pontrjagin 空间上一般的第 0、Ⅱa、Ⅲa 类 JVN- 代数中二次交换定理成立. 从而对第 0、Ⅱa、Ⅲa 类 JVN- 代数,推广了前面的结果.

对于 Hilbert空间上的正规算子 A,任意有界线性算子 B,若满足条件 $AB = BA$,则必有 $A^* B = BA^*$. 这一结论就是熟知的 Putnan-Fuglede 定理(以下简称 P-F 定理). 但在 Pontrjagin 空间上,这一结论一般不再成立. 本书讨论了在 Pontrjagin 空间上 P-F 定理成立的条件. 证明了当算子 A 没有零性不变子空间时,P-F 定理成立;当 A 有零性不变子空间,而 B 与 A 无公共零性不变子空间时,P-F 定理也成立. 而 A 与 B 有公共零性不变子空间时,通过构造例子说明此时 P-F 定理一般不成立. 对最后一种情况. 就指标为 1 的 Pontrjagin 空间上的算子进行了讨论. 证明当 A 与 B 及单位算子生成的弱闭对称算子代数属于第 0,Ⅱa 和 Ⅲa 类代数时,算子 B 与 A^* 仍可交换;而当算子代数属于第 Ⅰ,$Ⅱ_b$ 和 $Ⅲ_b$ 类代数时,通过例子说明存在算子 A,使得 B 与 A 可交换,但 B 与 A^* 不可交换. 最后给出当算子代数属于第 Ⅰ,$Ⅱ_b$ 和 $Ⅲ_b$ 类代数时,B 与 A^* 可交换的充分条件.

对一般的 Pontrjagin 空间上算子代数,二次交换定理与 P-F 定理成立条件是什么,还没有彻底解决,还有待进一步研究.

问题 4. Pontrjagin 空间上抽象的算子代数问题.

本书中给出了 Pontrjagin 空间上抽象的算子代数 JC^* - 代数的定义,为进一步研究 Pontrjagin空间上抽象的算子代数打下基础. 在此基础上可以撇开具体的Pontrjagin空间来抽象地讨论这些算子代数的各种性质,如理想、分类等深入研究的问题. 当然沿此方向研究可以借助于 Banach- 代数以及 $Banach^*$ - 代数的工具进行研究.

问题 5. Pontrjagin 空间上算子代数的 $A(1,3)$ 性质问题.

本书第三章中给出的各类算子代数的形式，是在算子代数具有 $A(1,3)$ 性质时给出的. 形象地说，具有 $A(1,3)$ 性质的算子代数，是说明这种代数在算子相对于 Pontrjagin 空间的正规分解是相当“细碎”的. 我们的问题是能否给出 $A(1,3)$ 性质的其他等价条件.

问题 6. 本书在讨论 Pontrjagin 空间上算子代数的 C^*-等价性时，是利用了 J. Cuntz 的方法得到一些结果. Pontrjagin 空间上关于算子代数的 C^*-等价性问题还有待进一步研究. 有三种方式研究 C^*-等价性问题：

1. 是研究在具体 Pontrjagin 空间上的算子代数的 C^*-等价性条件问题. 该种途径需要借助 Pontrjagin 空间的各种分解的结构性质.

2. 在 Pontrjagin 空间上算子代数分类的基础上，研究某些类算子代数的 C^*-等价性条件问题. 该种途径需要借助 Pontrjagin 空间上算子代数分类的结果. 当然算子代数分类可以有不同的分类方法和不同的分类结果. 可以考虑哪些类算子代数是 C^*-等价的，哪些类不 C^*-等价的.

3. 本书的第七章给出抽象的 JC^*-代数的概念. 因此可以撇开具体的 Pontrjagin 空间，在抽象的 JC^*-代数中考虑 C^*-等价性条件问题. 沿着这种途径研究需要 Banach-代数、Banach*-代数以及 C^*-代数的工具和方法.

参考文献

[1]夏道行,吴卓人,严绍宗,舒五昌.实变函数论与泛函分析(上、下册).北京:高等教育出版社,1984,1985.

[2]夏道行,严绍宗.线性算子谱理论Ⅱ.北京:科学出版社,1987.

[3]夏道行,严绍宗,舒五昌,童裕孙.泛函分析第二教程.北京:高等教育出版社,1987.

[4]童裕孙.泛函分析教程.上海:复旦大学出版社,2003.

[5]J. Bognar. Indefinite inner product spaces,Berlin:Springer-Verlag:1974.

[6]I. S. Iohvidov,M. G. Krein and H. Langer. Introduction to the spectral theory of oprators in spaces with an indefinite metric,Berlin:Akademie-Verlag,1982.

[7]G. K. Pedersen. C^*-Algebras and Their Automorphism Groups,New York:Academic Press,1979.

[8]S. Sakai. C^*-Algebras and W^*-Algebras,Berlin:Springer-Verlag,1971.

[9]P. A. M. Dirac. The physical interpretation of quantum mechanics. Proc. Roy Soc. London,1942,180A:1-40.

[10]L. S. Pontrjagin. Hermitian operators in spaces with indefinite metric. Iiv. Akad. Nauk SSSR,1944,8:243-280.

[11]M. A. Naimark. On commutative algebras of operators in the spaceπ_1. Dokl Akad Nauk SSSR,1964,156:734-737.

[12]M. A. Naimark. Commutative algebras of operators in the space π_1. Rev. Roumaine Math. Pures Appl,1964,9:499-528.

[13]M. A. Naimark. Kommutative symmetrische operatoren Algebra in Protrjaginschen Räumen $\prod_k$. Math. Ann,1965,162:147-171.

[14]M. A. Naimark. Commutative operator algebras in the space $\prod_k$. Dokl Akad Nauk SSSR,1965,161:767-770.

[15]R. S. Ismagilov. Rings of operator in a space with an indefinite metric. Dokl Akad Nauk SSSR,1966,171:269-271.

[16]V. S. Shulman. On operator algebras in spaces with indefinite metric of π_1 type. Dokl Akad Nauk SSSR,1971,201:44-47.

[17]V. I. Liberzon, V. S. Shulman. Non-degenerate operator algebras in spaces with indefinite metric. Izv. Akad Nauk SSSR,1973,37:533-538.

[18]A. I. Loginov, V. S. Shulman. Irreducible J-symmetric algebras of operators in spaces with an indefinite metric. Dokl Akad Nauk SSSR,1978,240:21-23.

[19]E. V. Kissin, A. I. Loginov, V. S. Shulman. Derivations of C^*-Algebras and almost Hermitian representations on $\prod_k$ spaces. Pacific J Math,1996,174:411-430.

[20]V. I. Chilin, S. S. Masharipov. The functional representation of commutative symmetric operator algebras in a Pontrjagin space. Algebra and Operator theory, 1998, 103-110.

[21]H. Langer. Spectral functions of defintizable operators in Krein space, Functions Analysis, Lecture Notes in Math. 948, Springer-Verlag, Berlin, 1982, 1-46.

[22]H. Nakazato. Extension of derivations in the algebra of compact operators, J. Funct. Anal., 57(1984), 101-110.

[23]H. Nakazato. Indefinite inner product spaces and derivations, Math. Japonica, 35 (1990), 1119-1124.

[24]S. Ota. A certan oprator aigebras in an indefinite inner product spaces, Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ., Ser A, 29, No2(1975), 203-210.

[25]S. Ota. Certan oprator aigebras induced by *-derivations in C^*-algebras on an indefinite inner product space, J. Funct. Anal., 30(1978), 238-244.

[26]V. S. hulman. On operator algebras in spaces with indefinite metric of $\prod$ 1type. Dokl Akad Nauk SSSR, 1972, 205:45-49.

[27]E. V. Kissin. Dissipative implementations of *-derivations of C^*-algebras and representations in indefinite metric spaces, J. London Math. Soc., 43(1991), 451-464.

[28]E. Kissin. On the uniqueness of representationnal indices of derivations of C^*-algebras, Pacific J. Math., 1994, 162(1)97-120.

[29]E. K issin. Derivations of C^*-algebras and representations ondefiency spaces of skew-symmetric operators, Proc, London, Math. ,1998,76(3)476-496.

[30]E. K issin. Superderivations of C^*-algebras implemented by symmetric operators, Commum. Math. Phys. ,1994,(160)333-348.

[31]E. K issin. Symmetric operator extesions of unbounded derivations of C^*-algebras, J. Funct. Anal. 1988(81)38-53.

[32]E. K issin. Semigroups of Representational indices of derivations of C^*-algebras, J. Funct. Anal. 1994(126)139-168.

[33]E. K issin. Representational indices of derivations of C^*-algebras and representations of $*$- algebras on Krein spaces, J. reine angew. Math. 1993,439,71-92.

[34]A. Maestripieri, F. M. Peria, Schur complements in Krein spaces, Integr. equ. oper. theory, 2007,59,207-221.

[35]J. Rovnyak. Methods on Krein spaces operator theory, Interpolation theory, systems theory and ralated topics, Oper. Theory Adv. Appl. ,2002,134,31-66.

[36]J. Cuntz. Locally C^*-equilent algebaras. J. Funct. Anal. ,1976,23:95-106.

[37]Tong yusun. Uniformly closed symmetric operator algebras on Pontrjagin spaces, China Ann. Math. ,1994,15A(5):603-611.

[38]Tong Yusun. A density theorem on the operator algebra in Pontrjagin space. J Math Anal & Appl, 2002,268:143-156.

[39]T. Ando, W. Szymanski. Order structure and Legesgue decompsition of positive definite operator functions, Indiana Vniv. Math. J. 35(1986),157-173.

[40]W. Mlak, A. Weron. Dilations of Banach space operator valued functions, Ann. Polon, Math. 38(1980),295-303.

[41]F. H. Sznfraniec. Dilations on involution semigroups, Proc. Amer. Math. Soc. 66 (1977),30-32.

[42]B. Sz. -Nagy. Extensions of liner transformations in Hilbert spaces which extend beyond the space, Appeendix to F. Riesz and B. Sz-Nagy, Functional Analysis, Vngar, New york, 1960.

[43]M. Reed, B. Simon. Methods of modern mathematical physics. Ⅰ, Ⅱ, Academic Press, New york, 1972,1975.

[44]M. kalka. On confectuer of hunt and murray concernjng q-Plurisubharmonic func-

tions. Proc. Amer. Math. soc. 73(1979),30-34.

[45]W. Szymanski. Positive forms and Dilations, Trans Amer. Math. Soc. sol(1987), 761-780.

[46]W. Mlak, A. Weron. Dilations of Banach space operator valued functions, Ann. Polon, Math. 38(1980),295-303.

[47]T. Y. Azizov, A. Dijksma. Contractive linear relations in Pontryagin spaces, Oper. Theory Adv. Appl. , Vol. 103, Birkhauser, Basel, 1998, 19-51.

[48]D. Alpay, T. Y. Azizov, A. Dijksma, J. Rovnyak. Colligations in Pontryagin Spaces with a Symmetric Characteristic Funtion, Oper. Theory Adv. Appl. , Vol. 130, Birkhauser, Basel, 2001, 55-82.

[49]D. Alpay, A. Dijksma, J. Rovnyak, H. S. V. de Snoo. Schur functions, operator colligatons, and reproducing kernel Pontryagin spaces, Oper. Theory Adv. Appl. , Vol. 96, Birkhauser, Basel, 1997.

[50]夏道行.关于条件正定广义函数,Sci. sinica,11(1962),1147-1168.

[51]严绍宗,童裕孙.关于不定度规的约化.中国科学,A辑 1985,11:986-996.

[52]童裕孙. A density theorem on the operator algebra in Pontrjagin space. J. Math Anal Appl,2002,268:143-156.

[53]童裕孙. Pontrjagin空间上的一致闭对称算子代数.数学年刊,A辑 1994,15:603-611.

[54]童裕孙.交换 J-Von Neumann 代数.数学年刊,A辑 1993,14:429-436.

[55]童裕孙. Pontrjagin空间上算子集合的两个稠密性定理.数学学报,1994,37:1-11.

[56]童裕孙. Krein空间上一类正常算子.数学年刊,A辑 1992,13:91-101.

[57]童裕孙.不定度规空间上算子的约化.数学学报,1986,29:658-660.

[58]严绍宗.关于算子方程 AXB=X.数学学报,1983,26:597-603.

[59]严绍宗,童裕孙. Unbounded selfadjoint operator in Pi_k space. Chinese Ann Math,1981,222:157-180.

[60]童裕孙.条件正定泛函的三个定理.复旦学报,21(1982),94-101.

[61]Yang haitao. On the symmetry of operator algebras on Pontrjagin spaces, Acta. Math. Sinica,2004,47(5):915-920.

[62]Yang haitao. Derivation of J. V. N-algebras on Pontrjagin spaces, China Ann. Math. ,2005,26A(1):105-112.

[63]Yang haitao. Conditional positive forms and dilations,J. Sys. Sci. and Math. Scis. ,2005,25(5):543-549.

[64]Yang haitao,Su guixian. On the conmmutatity of operators on Pontrjagin spaces,Acta. Math. Sinica,2006,49(2):451-458.

[65]Yang haitao. Equivalent conditions of weakly and uniformly closed on the degenerate operator algebra in Pontrjagin spaces,Acta. Math. Sinica,2006,49(5):857-860.

[66]Yang haitao. Structure of ideals of operator algebras on Pontrjagin space,Chines Journal of Contemporary Mathematics,2007,28(1)91-98.

[67]杨海涛.半群上条件正定函数的扩张.系统科学与数学,2007,27(5):714-719.

[68]Yang haitao. On the symmetry of operator algebras on Pontrjagin spaces,Acta. Math. Sinica,47 (2004):915-920.

[69]Yang haitao. Operator algebras on Pontrjagin space,Ph. D. Thesis,Fudan university,2004.

[70] Yang haitao. On Operator algebras on Pontrjagin space, post-doctoral Thesis,Tongji university,2006.

[71]Yang haitao. On the opretor algebras on $\prod_1$ space,China Ann. Math. ,2006,27A(4)543-550.

[72]Fang Xiaochun,Yang Haitao,Liu Shudong. General forms of operator algebras on Pontrjagin Space with neutral subspaces,Linear Algebra and its Applications,2007,425,184-209.

[73]方小春,杨海涛. JC^*-代数的抽象定义,数学学报,2007,50(5):989-994.

[74]杨海涛. The Operator Algebra of Class Ⅰ on Pontrjagin space,系统科学与数学,2013,33(8):993-1006.

[75]杨海涛. Structure of MS Operator Algebra on Pontrjagin space,待发表.

[76]杨海涛,方小春. $\prod_1$ 空间上算子代数的不变子空间,系统科学与数学,2008,28(10):1262-1274.

[77]杨海涛. Pontrjagin 空间上 P-F 定理成立的条件,待发表.

[78]杨海涛. Lorentz Algebra,待发表.

[General Information]
书名=PONTRJAGIN空间上的算子代数
作者=杨海涛著
页数=234
SS号=13487128
DX号=
出版日期=2013.12
出版社=厦门大学出版社